

Universidad Autónoma de Madrid
Facultad de Ciencias
Departamento de Física Teórica

**La Función de Partición de la Cuerda
Topológica como Función de Onda:
Agujeros Negros y Dualidades de “Gran N”**

Memoria de Tesis Doctoral realizada por
D. Sergio Montañez Naz
presentada ante el Departamento de Física Teórica
de la Universidad Autónoma de Madrid
para la obtención del Título de Doctor en Ciencias.

Tesis Doctoral dirigida por
Dr. D. César Gómez López
Profesor de Investigación del Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

Madrid, octubre de 2007

A mis padres

Índice general

Introducción	v
1. Agujeros negros en teoría de cuerdas y dualidades de “gran N”	1
1.1. Supercuerdas tipo IIB	1
1.2. La correspondencia agujeros negros/cuerdas	6
1.3. Dualidades de “gran N” de ’t Hooft	10
1.4. La correspondencia AdS/CFT	12
2. Agujeros negros Calabi-Yau y el mecanismo del atractor	19
2.1. Variedades Calabi-Yau y su espacio de moduli de estructuras complejas	20
2.2. Agujeros negros Calabi-Yau	23
2.3. El caso extremal y las ecuaciones del atractor	28
2.4. Flujo del atractor BPS	31
2.5. La correspondencia agujeros negros CY/cuerdas	33
3. Cuerdas topológicas y las correcciones a la entropía	37
3.1. Algunas nociones de cuerdas topológicas	38
3.2. Anomalía holomorfa	43
3.3. Entropía de los agujeros negros como una carga de Noether	45
3.4. Entropía de Bekenstein-Hawking-Wald para agujeros negros CY super-simétricos	48
3.5. Generalizaciones de BHW	51

4. Cuantización de $H^3(CY_3, \mathbb{R})$	53
4.1. Descripción lagrangiana de la teoría	54
4.2. Descripción hamiltoniana	55
4.3. Polarización de Kähler	59
4.4. Polarización real	63
4.5. La función de partición de la cuerda topológica como un estado cuántico	67
4.6. Polarizaciones holomorfas	71
4.7. El estado “cuerda topológica” en polarización real	74
4.8. Polarización no lineal	76
4.9. Discusión	77
5. Entropía y funciones de distribución cuánticas	81
5.1. Flujo del atractor cuántico	83
5.2. La función de distribución cuántica del agujero negro	86
5.3. OSV en términos de la cuantización de H^3 . Significado físico	90
6. Dualidad de “gran N” como un cambio de polarización	95
6.1. Dualidad de Dijkgraaf-Vafa	98
6.2. Función de partición geométrica como un estado cuántico	106
6.3. Transición geométrica como un cambio de polarización	114
6.4. Caso de branas no compactas	117
Conclusiones	123
Agradecimientos	129
A. Estados comprimidos y funciones de distribución cuánticas	133
A.1. Estados comprimidos	133
A.2. Funciones de distribución cuánticas	135
A.2.1. Función de Wigner	136

A.2.2. Función de Husimi	137
A.2.3. Función de Anti-Husimi	137
B. Geometría cuántica en las teorías de cuerdas minimales	139
B.1. Branas FZZT y el espacio blanco clásico de la cuerda minimal	140
B.2. Cuerdas minimales y la cuantización de $H(x, y)$	141
B.3. Catástrofes y el límite continuo	144

Introducción

El estudio de la teoría de cuerdas se ha convertido en los últimos 25 años en uno de los campos de investigación más activos de la física teórica. Esta teoría, que posee perturbativamente como elementos fundamentales objetos unidimensionales denominados cuerdas, empezó a construirse inicialmente como un intento de describir la física de la interacción fuerte. Pero, tras el descubrimiento en los años 70 del siglo pasado de que las cuerdas cerradas poseen en su espectro no masivo una excitación que se comporta a bajas energías como el gravitón, pasó a proponerse como una teoría cuántica de la gravitación consistente. La introducción de supersimetría en la teoría, dando lugar a la teoría de supercuerdas, la potencialidad de ésta para describir todas las partículas e interacciones de la naturaleza y el descubrimiento en los años 80 de la cancelación de ciertas anomalías (que harían que la teoría no tuviese sentido físico) provocaron un gran aumento del interés en su estudio por parte de la comunidad científica. Desde entonces la teoría de cuerdas es el marco dominante para la construcción de una teoría cuántica que unifique todas las interacciones de la naturaleza, incluida la gravitatoria.

Además del viejo sueño de la unificación, otro motivo por el que ha resultado interesante desarrollar la teoría de cuerdas es porque, de acuerdo con la propuesta de 't Hooft [1], ésta constituye un marco útil para el estudio del régimen no perturbativo de las teorías gauge de tipo $SU(N)$, $U(N)$, $O(N)$, etc. La idea consiste en “separar” los diagramas de Feynmann que constituyen la expansión perturbativa de las distintas amplitudes de la teoría gauge en diagramas gordos (“fatgraphs”), cada uno de los cuales es proporcional a una potencia de N bien definida. De esta forma la expansión perturbativa queda reorganizada como una expansión de “gran N ”

$$\mathcal{A} = \sum_{g=0}^{\infty} \left(\frac{1}{N} \right)^{2g-2} \mathcal{A}_g(t) \quad (0.1)$$

Cada uno de los coeficientes $\mathcal{A}_g(t)$ de esta expansión es, a su vez, una serie de potencias del parámetro de 't Hooft $t = g_{\text{YM}}^2 N$, pero con mejores propiedades de convergencia. La propuesta de 't Hooft consiste en asociar, a la teoría gauge, una teoría de cuerdas cuya expansión en género coincida con la expansión de “gran N ” de la teoría gauge. De esta forma, cada amplitud de la teoría de cuerdas constituye una definición no perturbativa de $\mathcal{A}_g(t)$.

Una segunda revolución en el desarrollo de la teoría de cuerdas tuvo lugar a mediados de los años 90, donde se produjeron grandes avances en la unificación de las diferentes versiones de la teoría de supercuerdas mediante el descubrimiento de ciertas transformaciones discretas no perturbativas (dualidades) que las relacionan y de la existencia de nuevos objetos no perturbativos, denominados branas, como ingredientes fundamentales de la teoría. El estudio de estos nuevos objetos, fundamentalmente de las Dp-branas, ha permitido encontrar, a través de la correspondencia agujeros negros/teoría de cuerdas [2], una descripción microscópica de la física de ciertos agujeros negros, al menos aquellos que son supersimétricos. Para éstos se ha encontrado un acuerdo total (en el límite termodinámico) entre el tratamiento estadístico del modelo microscópico del agujero negro dado por teoría de cuerdas y la descripción macroscópica dada por las leyes termodinámicas de los agujeros negros. No obstante este tipo de agujeros negros, cargados, extremales y supersimétricos, no son realistas y son los que menos interés tienen desde un punto de vista físico ya que no emiten radiación de Hawking. El proceso de radiación de Hawking ha podido ser descrito microscópicamente para pequeñas desviaciones de la extremalidad como un proceso en el que cuerdas abiertas ancladas en las branas se unen para formar cuerdas cerradas, y se han hecho también avances en el estudio de la descripción microscópica de agujeros negros neutros, pero hasta ahora la teoría no ha podido dar una descripción microscópica de agujeros negros más realistas como el de Schwarzschild.

Ocurre que, al margen de las críticas que también ha recibido la teoría de cuerdas referentes a su supuesta no-falsabilidad debido a su aparente estructura de vacíos, un problema central que tiene la teoría constituye el hecho de que todavía no tenemos una formulación completa no perturbativa de ella. El instrumento que han utilizado fundamentalmente los teóricos de cuerdas para poner en práctica la correspondencia agujeros negros/cuerdas y para establecer la famosa web de dualidades se basa en la característica que tienen los estados supersimétricos de que algunas de sus propiedades se mantienen invariantes al cambiar el acoplo e incluso llevarlo más allá del régimen perturbativo. Un requerimiento indispensable que se espera de una teoría fundamental que incluya la gravitación cuántica es que sea capaz de describir adecuadamente la dinámica del espacio-tiempo. En cambio, las formulaciones perturbativas que tenemos de la teoría de cuerdas no pueden hacer esto porque son dependientes del background. Una formulación no perturbativa de la teoría de cuerdas nos permitiría también estudiar, extrapolando las dualidades de gran N de 't Hooft, aspectos no perturbativos de las teorías gauge incluso en el régimen en el que no es válida la expansión de gran N .

En todo caso, el hecho de que la teoría de cuerdas sea capaz de proporcionar una descripción microscópica de ciertos agujeros negros constituye una fuerte indicación de que ésta tiene todavía mucho que decirnos acerca la naturaleza cuántica de la gravitación. En efecto, el hecho de que haya sido capaz de reproducir la fórmula de la entropía de Bekenstein-Hawking mediante una suma explícita sobre estados indica que

se han identificado los grados de libertad microscópicos correctos. Esto, junto con el hecho de que la teoría contiene como límite de baja energía la relatividad general (acoplada a materia) parece indicar que estamos en un marco adecuado y unificado para estudiar tanto el régimen microscópico como el macroscópico. Es de esperar, por tanto, que alguna formulación adecuada de la “teoría M” nos pueda dar una descripción independiente del background de la gravitación cuántica que contenga como esquinas perturbativas las diferentes versiones de la teoría de supercuerdas.

Un programa que está siendo explotado durante los últimos años consiste en examinar la descripción cuerdosa de los agujeros negros con mayor precisión, es decir, explotar la correspondencia más allá del límite termodinámico. De hecho, el éxito inicial en el conteo de la entropía [3] tenía cierto aspecto de “milagroso”, en el sentido de que el éxito en la reproducción de la fórmula de Bekenstein-Hawking a partir de la descripción microscópica cuerdosa no se pone de manifiesto hasta que se tienen en cuenta todos los factores numéricos. El acuerdo es aun más sorprendente si se incluyen aspectos adicionales como rotación o ligeras desviaciones de la extremalidad. Pero pronto se entendió que los elementos esenciales en el acuerdo entre los dos lados de la correspondencia agujeros negros/cuerdas eran, por un lado, la región AdS de cerca del horizonte del agujero negro y, por otro, la teoría conforme (CFT) que describe de forma efectiva la física de baja energía de las branas que constituyen la descripción microscópica cuerdosa del agujero negro. Esto, junto con otras observaciones, ha dado lugar a la denominada correspondencia AdS/CFT o de Maldacena [4–6], que propone la equivalencia entre ciertas teorías de cuerdas en un background que contiene el espacio Anti de Sitter (AdS) y ciertas teorías de campos conformes (CFT) que viven en la frontera de este espacio y que tienen una dimensión menos. Esta correspondencia, además de constituir una realización concreta, por un lado, del principio holográfico [7] y, por otro, de las dualidades de “gran N ” de ‘t Hooft, ha servido para desmitificar en parte el éxito en el conteo de la entropía: la entropía microscópica viene dada en términos de la carga central de la CFT, y ésta puede calcularse exactamente en algunos casos mediante su relación con ciertas anomalías¹. En su versión fuerte la correspondencia AdS/CFT proporciona una definición no perturbativa de la teoría de cuerdas en ciertos espacios que sean asintóticamente AdS. Se ha demostrado que la CFT correspondiente posee suficientes estados para describir microscópicamente todas las excitaciones gravitatorias de energía finita (incluidos los agujeros negros) en el espacio asintóticamente AdS. Estos estados no tienen por qué ser supersimétricos, pero sí que corresponden a excitaciones sobre un vacío supersimétrico.

El presente trabajo se enmarca dentro del contexto de este “paradigma” o “programa de investigación” surgido, como ya hemos indicado, a lo largo de la década pasada. Una parte de esta tesis se centra en agujeros negros cuatridimensionales obtenidos de compactificaciones de la teoría de cuerdas tipo II en variedades tipo Calabi-Yau de 3

¹Para una revisión interesante de estos resultados véase la ref. [8].

dimensiones complejas (CY_3). De acuerdo con la literatura, llamaremos a estos agujeros negros “agujeros negros Calabi-Yau”. Se trata de generalizaciones del agujero negro de Reissner-Nordstrom, con distintas cargas eléctricas y magnéticas bajo distintos grupos gauge $U(1)$, en el que algunos de los moduli del Calabi-Yau toman distintos valores a medida que varía la distancia al agujero negro. Una característica de estos agujeros negros es que, bajo ciertas condiciones, poseen una propiedad, denominada “mecanismo del atractor”, que consiste en que los valores de estos moduli en el horizonte están fijados por las cargas del agujero negro, en el sentido de que son invariantes bajo cambios continuos de los valores de estos mismos moduli en el infinito (los valores de vacío). Como ya indicó Maldacena en [4], este mecanismo del atractor es crucial para que la correspondencia AdS/CFT asociada a estos agujeros negros pueda funcionar. Un problema todavía sin resolver es encontrar, suponiendo que exista, el dual holográfico para la teoría de cuerdas en el horizonte de estos agujeros negros. De hecho, el conteo inicial de la entropía microscópica de estos agujeros negros [9] se basa en una descripción 11-dimensional, en teoría M, en la que, al compactificar en el Calabi-Yau, el agujero negro es una cuerda negra en 5-dimensiones de tal forma que la correspondencia asociada es AdS_3/CFT_2 . Más aun, recientemente se ha descubierto una conexión simple e inesperada entre la función de partición de estos agujeros negros y la teoría de cuerdas topológicas en el Calabi-Yau en el punto del atractor. Esta conexión fue conjeturada de forma bastante oscura e imprecisa por Ooguri, Strominger y Vafa (OSV) [10] y, a pesar del gran caudal de trabajos a los que ha dado lugar, resulta todavía bastante misteriosa.

Por otro lado las cuerdas topológicas, introducidas por Witten hace más de 15 años [11], no sólo han conducido a resultados matemáticos muy interesantes, sino que, además, han resultado tener aplicaciones físicas más allá de las que originalmente motivaron su construcción. Durante este tiempo han sido también consideradas como “modelos de juguete” para tratar de entender ciertas propiedades de las teorías de cuerdas en una versión simplificada. De hecho, el mismo Witten [12], en un intento de abordar el problema de la dependencia en el background en teoría de cuerdas en esta versión simplificada, encontró un resultado muy interesante: la dependencia en el background de las amplitudes de cuerdas topológicas cerradas en el modelo B, que viene dada por las ecuaciones de la anomalía holomorfa [13, 14], puede interpretarse simplemente como la variación de una función de onda en cuantización geométrica bajo un cambio infinitesimal de polarización. En otras palabras, la función de partición de cuerdas topológicas Z_{top} no es realmente una función, sino una función de onda en una representación de estados coherentes dependientes del background. El correspondiente estado $|\psi_{\text{top}}\rangle$ del espacio de Hilbert abstracto (independiente de la representación) es, por tanto, independiente del background. Se trata de un estado concreto de un sistema cuántico con espacio de fases físico dado por $H^3(M, \mathbb{R})$, donde M es la variedad Calabi-Yau donde viven las cuerdas topológicas. Actualmente se piensa que esta interpretación de Z_{top} como función de onda contiene algo profundo acerca de la naturaleza de la

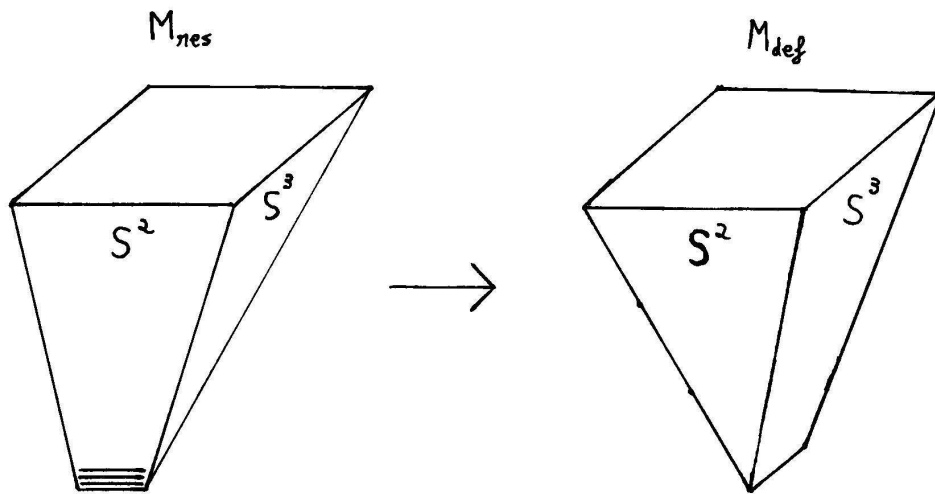


Figura 0.1: Transición geométrica de tipo “conifold”. En el lado M_{res} hay una serie de branas enrolladas en una 2 esfera no-contractible, rodeadas por una 3-esfera contractible. En el otro lado de la transición (M_{def}) es la 3-esfera la que se hace no-contractible.

teoría de cuerdas y que hasta la fecha no entendemos con claridad.

Además de la interpretación de la función de partición de la cuerda topológica cerrada como función de onda, otra lección importante que se ha aprendido acerca de las cuerdas topológicas es que hay una dualidad de gran N [15, 16], asociada a cierto tipo de transiciones geométricas, que relaciona un background de cuerda abierta con otro distinto de cuerda cerrada. Las transiciones geométricas que aparecen en estas dualidades son de tipo “conifold” (véase figura 0.1). Éstas recuerdan a la que se da en la correspondencia AdS/CFT. Por ejemplo, en el caso original $\text{AdS}_5/\text{CFT}_4$, si consideramos que la teoría gauge $\mathcal{N} = 4$ vive en una S^4 no contractible, rodeada de una S^5 contractible, la transición geométrica hacia el lado $\text{AdS}_5 \times S^5$ hace que la S^5 pase a ser no contractible, mientras que la S^4 es ahora la frontera de AdS_5 y, por tanto, es contractible. De hecho ambas son dualidades de “gran N ” de ’t Hooft. Es de gran importancia estudiar a fondo estas dualidades “cuerda topológica abierta/cuerda cerrada”. Éstas no sólo nos permiten, entre otras cosas, calcular las amplitudes de la cuerda topológica cerrada para algunos espacios blanco concretos, sino que además podríamos considerarlas como un escenario simplificado en el que estudiar algunos aspectos de AdS/CFT.

La presente tesis es un estudio de la interesante propiedad de las cuerdas topológicas que hemos mencionado anteriormente que hace que su función de partición sea una

función de onda. Este análisis se hace enfocado fundamentalmente en dos aplicaciones:

- Por un lado se estudia qué pueden aportar esta interpretación de Z_{top} como función de onda y la mecánica cuántica de H^3 a la conexión agujeros negros Calabi-Yau/cuerdas topológicas de la que habla OSV.
- Por otro, se estudia qué papel juega esta propiedad en un tipo particular de dualidades de “gran N ”: las dualidades de Dijkgraaf-Vafa [17].

El capítulo 1 es un breve resumen, a modo de introducción, de los fundamentos en los que se basa la correspondencia agujeros negros/teoría de cuerdas, la idea de 't Hooft de dualidad de “gran N ” y su realización explícita en la correspondencia AdS/CFT . En el capítulo 2 se describen los agujeros negros Calabi-Yau como soluciones de la teoría efectiva de supergravedad cuatridimensional de baja energía obtenida al compactificar la teoría de cuerdas tipo II en un Calabi-Yau M y se revisan las condiciones en las que se presenta el mecanismo del atractor. El capítulo 3 es, por un lado, una brevísima introducción a las cuerdas topológicas y a la anomalía holomorfa. Por otro, se hace una revisión de la relación entre las amplitudes de esta teoría y las correcciones de Wald a la entropía de los agujeros negros Calabi-Yau BPS más allá del límite termodinámico (entropía de Bekenstein-Hawking-Wald, BHW). Es aquí donde se introduce la conjetura OSV. En el capítulo 4 se desarrolla en detalle la cuantización de $H^3(M, \mathbb{R})$ y su relación con la teoría de cuerdas topológicas. En particular se analizan en detalle las distintas polarizaciones en las que se puede representar el estado “cuerda topológica”, las propiedades que tienen las funciones de onda asociadas en cada polarización y el significado mecano-cuántico de los cambios de polarización. En el capítulo 5 se analiza la conexión agujeros negros Calabi-Yau/cuerdas topológicas desde el punto de vista de la cuantización de $H^3(M, \mathbb{R})$. Un posible camino para esta conexión viene dado por la relación, propuesta por Ooguri, Vafa y Verlinde [18], entre la función de onda “cosmológica” asociada a la geometría del agujero negro en cuantización radial y la cuantización de $H^3(M, \mathbb{R})$. Revisamos esta propuesta a la luz de los resultados del capítulo 4. Pero el camino que analizamos en detalle es otro bien distinto. Éste consiste, en cambio, en relacionar la entropía del agujero negro, via su dependencia en las energías libres de la cuerda topológica, con objetos de la mecánica cuántica de $H^3(M, \mathbb{R})$. En particular, mediante la definición de un mapa entre los agujeros negros y ciertos estados coherentes generalizados de la cuantización de $H^3(M, \mathbb{R})$, veremos que se puede representar la entropía de BHW y la conjetura OSV en términos de una función de distribución cuántica de tipo Husimi/anti-Husimi mixta. Esto da lugar a que se pueda analizar el significado de las correcciones a la entropía desde el punto de vista de la cuantización de $H^3(M, \mathbb{R})$. En el capítulo 6 aplicamos todo el análisis realizado en el capítulo 4 para estudiar la dualidad de Dijkgraaf-Vafa. El estudio se centra en interpretar mecano-cuánticamente la relación entre las energías libres, holomorfas, de las cuerdas abiertas en el lado “abierto” de la dualidad y las energías libres, no

holomorfas, correspondientes al lado cerrado. Esto lleva a una imagen en la que ambos lados de la dualidad no son más que distintas representaciones mecano-cuánticas de un mismo estado independiente del background, y en la que la transición geométrica de tipo “conifold” es el cambio de polarización que lleva de una representación a otra. Las principales conclusiones del presente trabajo se resumen en el capítulo “Conclusiones”. Por último, se ha incluido para facilitar la lectura de los capítulos 4 y 5 un breve apéndice (apéndice A) sobre los estados coherentes generalizados y las funciones de distribución cuánticas que se han utilizado. La última sección del capítulo 6 enlaza con un trabajo realizado con anterioridad sobre la geometría cuántica de las teorías de cuerdas minimales [19, 22]. Por este motivo resumimos brevemente parte de este trabajo en el apéndice B. El contenido de los distintos capítulos de esta tesis está basado fundamentalmente en los trabajos [20] y [21].

Capítulo 1

Agujeros negros en teoría de cuerdas y dualidades de “gran N ”

En este capítulo introducimos brevemente las ideas y las motivaciones físicas que contextualizan el presente trabajo. En la sección 1.1 se introducen algunos aspectos básicos de la teoría de cuerdas. Nos centramos fundamentalmente en la “esquina perturbativa” IIB, ya que es en esta descripción en la que hemos trabajado fundamentalmente en esta tesis. A continuación, en la sección 1.2 introducimos la idea fundamental que hay detrás de la correspondencia agujeros negros/cuerdas. En la sección 1.3 recordamos la idea de 't Hooft de asociar, a una teoría gauge dada, una teoría de cuerdas cuya expansión en género coincida con la expansión de “gran N ” de la teoría gauge. Esta idea ha podido ser realizada explícitamente en el contexto de la teoría de supercuerdas en la correspondencia AdS/CFT, que introducimos brevemente en la sección 1.4.

1.1. Supercuerdas tipo IIB

La formulación perturbativa de las teorías de supercuerdas [23] está basada en una teoría cuántica de campos en una superficie bidimensional Σ , denominada hoja de mundo. Esta teoría bidimensional tiene unos campos bosónicos X^M , con $M = 0, 1, \dots, 9$, que se corresponden con las coordenadas de un espacio blanco de 9+1 dimensiones. Por tanto, durante su evolución, la cuerda describe en el espacio-tiempo una superficie bidimensional $X^M(\sigma, \tau)$, con $\sigma \equiv \sigma + 2\pi$. Esto hace que esta teoría pueda interpretarse a la vez como una mecánica cuántica de cuerdas cerradas relativistas orientadas que se mueven en el espacio blanco. Así, por ejemplo, en el caso de la amplitud vacío-vacío, la hoja de mundo es una superficie de Riemann cerrada, caracterizada topológicamente por su género g .

En el caso de las supercuerdas tipo II en el formalismo NSR los campos bosónicos X^M vienen acompañados de sus correspondientes supercompañeros fermiónicos. Dado que la cuerda es cerrada, los campos X^M tienen condiciones periódicas en los extremos del segmento $\sigma \in [0, 2\pi]$. En cambio, los fermiones pueden tener condiciones de frontera tanto periódicas (R) como antiperiódicas (NS), independientes, además, en los modos que se propagan a la izquierda y a la derecha. Si la métrica del espacio-tiempo en el que se propaga la cuerda es la métrica de Minkowski η_{MN} , la parte bosónica de la acción de la teoría en la hoja de mundo es

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d\tau d\sigma \sqrt{h} [h^{ab} \partial_a X^M \partial_b X_M] \quad (1.1)$$

donde $\alpha' := l_s^2$ es el cuadrado de la longitud característica de la cuerda y h_{ab} es la métrica en Σ . La cuantización de esta teoría da lugar a distintos estados que se corresponden con distintos modos de “vibración” de la cuerda, caracterizados por un número de oscilación N . La idea es que las distintas partículas que, se espera, están presentes en la naturaleza, incluido el gravitón, no son más que estos diferentes modos de vibración del mismo objeto fundamental: la cuerda. En el caso de la teoría de cuerdas tipo IIB los estados de energía más pequeña del espectro corresponden a partículas de masa nula y son:

- En el sector NS-NS, un estado de espín 2 que se identifica con el gravitón, un estado que corresponde a las excitaciones de una 2-forma potencial gauge B_2 y un estado que corresponde con las excitaciones de un campo escalar ϕ , denominado dilatón.
- En el sector NS-R, un gravitino de espín 3/2 y un dilatino de espín 1/2 de quiralidades opuestas. En el R-NS, estados similares con la misma quiralidad que los anteriores.
- En el sector R-R, estados que se corresponden con las excitaciones de las p-formas C_p con $p = 0, 2, 4$. Escribimos sus correspondientes $(p+1)$ -formas “field strength” como $F_{p+1} := C_p$.

El resto de estados poseen masas al cuadrado que son múltiplos cada vez mayores de $1/\alpha'$ y forman una torre supuestamente (en esta descripción perturbativa) infinita.

Dado el espectro de masa nula de esta teoría, las cantidades de interés son las amplitudes de procesos de interacción entre estos modos de oscilación de la cuerda. Como es de esperar, estas amplitudes son funciones de correlación cuánticas de los operadores vértice asociados a los distintos estados, pero con un elemento más: la suma sobre las distintas topologías de la hoja de mundo, es decir, una suma en género

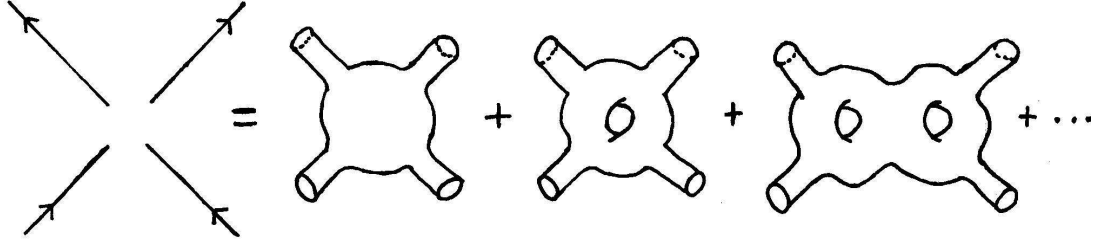


Figura 1.1.1: Las amplitudes en teoría de cuerdas incluyen una suma sobre todos los posibles géneros de la hoja de mundo.

(véase figura 1.1.1), de forma que

$$\text{amplitud} = \sum_{g=0}^{\infty} \int [DX] \mathcal{O}_A \mathcal{O}_B \mathcal{O}_C \mathcal{O}_D e^{iS} \quad (1.2)$$

Una propiedad fundamental de la teoría de cuerdas es que estas amplitudes son finitas en cada orden en g y son invariantes ante difeomorfismos del espacio-tiempo. Se trata, por tanto, de una descripción de la interacción gravitatoria consistente a nivel cuántico. De hecho, es posible definir una acción en el espacio-tiempo correspondiente a una teoría de campos efectiva cuyas excitaciones corresponden a los estados sin masa de la cuerda y cuyas amplitudes a nivel árbol reproducen las amplitudes de la teoría de cuerdas en el límite de baja energía $E \ll 1/l_s$ en el que la cuerda se reduce a una partícula puntual. La teoría efectiva de baja energía correspondiente a la teoría de cuerdas tipo IIB es una teoría de supergravedad $d = 10$ $\mathcal{N} = 2$ (16 supersimetrías) quiral que se denomina “teoría de supergravedad tipo IIB”. Puede verse que el valor de la longitud de Planck de esta teoría varía si cambiamos el valor esperado en el vacío del dilatón $\langle \phi \rangle = \phi_0$. De aquí se observa que la cantidad que actúa como constante de acoplo de la cuerda en el espacio-tiempo es $g_s = e^{\phi_0}$, de forma que la expansión en género es a la vez una expansión en potencias de g_s , pudiéndose escribir por ejemplo, la amplitud vacío-vacío de la forma

$$F^{\text{cuerda}} = \sum_{g=0}^{\infty} (g_s)^{2g-2} F_g^{\text{cuerda}} \quad (1.3)$$

Aunque no se conoce de forma exacta cómo debe modificarse la teoría en la hoja de mundo para describir la propagación de la cuerda en un background general en el que todos los campos de la teoría efectiva de baja energía son no triviales, sí que se sabe como hacer esto en presencia de un background no trivial de campos NSNS:

- Para una métrica del espacio blanco no trivial, sustituir η_{MN} por el funcional $G_{MN}(X^R(\sigma, \tau))$.
- Para un background no trivial de 2-forma RR B_2 , añadir el término

$$\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} B_2 \quad (1.4)$$

que implica que la cuerda se comporta como un objeto cargado eléctricamente respecto de B_2 .

- Para un dilatón ϕ no trivial, añadir el término de Einstein

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} d\tau d\sigma \sqrt{h} R[h] \phi \quad (1.5)$$

que, para $\phi = \langle \phi \rangle$, y al ser la teoría bidimensional, es igual a $\langle \phi \rangle \xi$, con $\xi = 2 - 2g$ el número de Euler de la hoja de mundo. Nótese que, si se considera el efecto que tiene este término sobre la amplitud vacío-vacío, se obtiene la expansión (1.3).

Esta prescripción satisface el criterio de que, para backgrounds que sean una pequeña perturbación del trivial, las amplitudes que se obtienen corresponden a una resumación de una expansión en amplitudes de la teoría sobre el background trivial con inserciones de los operadores vértice correspondientes. Nótese que, en general, en un background con métrica no trivial la teoría de la hoja de mundo se convierte en una teoría con interacciones no triviales (modelo sigma no lineal) que no se sabe resolver de forma exacta salvo en algunos casos concretos. Es necesario, por tanto, estudiarla en teoría de perturbaciones, siendo el parámetro de expansión adimensional que pondera los efectos cuánticos la cantidad $\frac{\alpha'}{L^2}$, donde L es la longitud característica del espacio blanco. Esta es la denominada expansión en α' . La condición de que esta teoría sea consistente a nivel cuántico implica que los campos de background tienen que obedecer unas ecuaciones diferenciales concretas que, a primer orden en α' , no son más que las ecuaciones que se deducen de la acción efectiva de supergravedad.

Por otro lado, las p-branas Dirichlet o, Dp-branas, son objetos no-perturbativos de la teoría que se definen como subvariedades del espacio-tiempo de $p+1$ dimensiones, de forma que en su presencia la teoría contiene también cuerdas abiertas cuyos extremos están anclados en estos objetos [24]. Para estas cuerdas abiertas la hoja de mundo correspondiente a la amplitud vacío-vacío es, por tanto, una superficie de Riemann $\Sigma_{g,h}$ con un número h de fronteras. El nombre de Dp-brana viene del hecho de que los campos X^i correspondientes a las direcciones transversales al volumen de mundo $(p+1)$ -dimensional de las Dp-branas tienen asociadas condiciones de frontera de tipo Dirichlet. Estas condiciones de frontera implican relaciones entre las supercargas del

espacio-tiempo, de tal manera que una Dp-brana plana en el espacio de Minkowski de 10 dimensiones rompe la mitad de las supersimetrías, es decir, 16 de las 32 totales.

Las excitaciones de las cuerdas abiertas hacen que las Dp-branas sean objetos dinámicos de la teoría, dinámica que no está desacoplada del sector cerrado, ya que cuerdas abiertas pueden dar lugar a cerradas si unen sus extremos, pudiéndose dar también el proceso inverso. En particular las excitaciones no masivas de las cuerdas abiertas no cambian la energía de la Dp-brana y pueden considerarse como coordenadas colectivas de la brana. Este espectro no masivo está compuesto por estados que corresponden a las excitaciones de un campo vectorial A^α , $9 - p$ escalares reales Φ^i y 16 fermiones. Juntos constituyen el supermultiplete vector de una teoría gauge de grupo $U(1)$ con 16 supercargas y $p + 1$ dimensiones. Al igual que en el sector cerrado, es posible obtener una acción efectiva que gobierna la dinámica a baja energía de estas excitaciones no masivas de la Dp-brana [26, 27]. Los $9 - p$ escalares de esta teoría efectiva son los bosones de Goldstone asociados a las simetrías traslacionales del espacio-tiempo que rompe la Dp-brana. Sus valores esperados en el vacío describen, por tanto, la localización del hiperplano en el espacio transversal. En cambio, los 16 fermiones del espectro no masivo pueden considerarse como los Goldstinos asociados a las 16 supersimetrías rotas por la Dp-brana. Del hecho de que las Dp-branas han de acoplarse al sector cerrado de la teoría tipo IIB de forma consistente se obtiene que éstas son los objetos fundamentales de la teoría cargados eléctricamente bajo C_{p+1} (y magnéticamente bajo la forma dual C_{7-p}) y que sólo existen las de p impar.

Consideremos una configuración dada por 2 Dp-branas planas paralelas. Si se calcula la amplitud de vacío a un lazo para las cuerdas abiertas ancladas entre las dos branas el resultado es idénticamente cero. Esto se debe a la propiedad de las branas de ser BPS y de que ambas, al ser paralelas, preservan las mismas supersimetrías. Pero esta cancelación también puede entenderse haciendo uso de la denominada “dualidad cuerdas abiertas/cuerdas cerradas” (véase figura 1.1.3) mediante la cuál la amplitud de vacío de cuerda abierta a un lazo puede entenderse como la correspondiente a nivel árbol de un proceso de intercambio de cuerdas cerradas entre las dos branas. El hecho de que se anule se entiende entonces como una cancelación de la fuerza atractiva debido al intercambio de campos NSNS (como el gravitón) y la repulsiva debido al intercambio de los campos RR bajo los que están cargadas eléctricamente las branas. Es posible, por tanto, tener en equilibrio estático varias Dp-branas paralelas. En este caso hay que tener en cuenta, además de las cuerdas abiertas cuyos extremos terminan en la misma brana, las cuerdas que vayan de una brana a otra. Todas estas posibilidades se traducen en que hay N^2 , donde N es el número de branas, sectores de cuerda abierta, de forma que cada estado tiene asociada una matriz $N \times N$ de Chan-Paton. Puede verse entonces que el espectro no masivo es el mismo que el de una sola Dp-brana, pero con el grupo gauge aumentado a $U(N)$: los campos A_a y Φ^i son ahora matrices $N \times N$ correspondientes a la representación adjunta de $U(N)$.

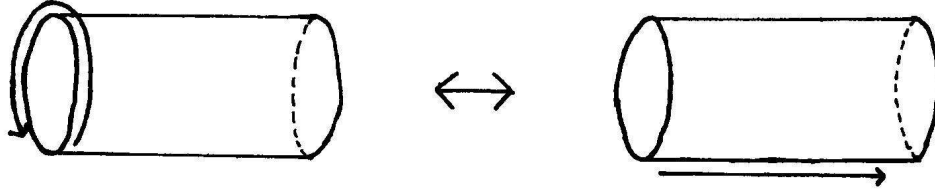


Figura 1.1.2: La amplitud de vacío de cuerda abierta a un loop puede entenderse como la correspondiente a nivel árbol de un proceso de intercambio de cuerdas cerradas entre dos branas.

1.2. La correspondencia agujeros negros/cuerdas

Ya hemos mencionado en la introducción que la teoría de cuerdas proporciona un marco interesantísimo para el estudio del problema de la entropía de los agujeros negros. Este problema surge como consecuencia del estudio semiclásico de los agujeros negros, que pone de manifiesto que son sistemas termodinámicos con una entropía

$$S = \frac{A}{4G^N} \quad (1.6)$$

siendo A el área del horizonte y G^N la constante de Newton, y que las leyes clásicas que obedecen, que se deducen de las ecuaciones clásicas de la relatividad general, son leyes termodinámicas. Pero la descripción termodinámica de un sistema físico, que se lleva a cabo mediante el uso de un número muy reducido de parámetros, es considerada tradicionalmente una descripción “burda”, que no tiene en cuenta todos los grados de libertad del sistema, y que surge como consecuencia de que no se tiene acceso experimental a todos esos grados de libertad y de que el tratamiento riguroso, microscópico, es imposible de realizar si el número de grados de libertad del sistema es muy grande. La mecánica estadística cuántica realiza la conexión entre la descripción microscópica y la macroscópica mediante el uso de colectivos de Gibbs [28], que son conjuntos de estados microscópicos compatibles con una serie de condiciones macroscópicas externas impuestas al sistema, cada uno de ellos con una probabilidad de representar el estado del sistema. El concepto de entropía aparece entonces asociado a todo el colectivo, y no a cada microestado concreto. Por ejemplo, el colectivo microcanónico, para sistemas aislados en equilibrio, está formado por los ω estados cuánticos independientes que tienen una energía dada y son compatibles con el resto de parámetros externos, todos ellos con la misma probabilidad de representar al sistema (postulado de igualdad de probabilidades a priori). La conexión con la física macroscópica se lleva a cabo mediante la asignación

$$S = \log \omega \quad (1.7)$$

En el caso de los agujeros negros no sabemos cuáles son los microestados accesibles que dan lugar a la entropía (1.6).

La idea de construir modelos microscópicos mecano-cuánticos mediante cuerdas que resuelvan este problema viene de la sugerencia de Susskind [29] de que debe haber alguna correspondencia entre agujeros negros y estados en teoría de cuerdas. El argumento en el que se basa esta sugerencia es el siguiente. Supongamos una cuerda en un estado altamente excitado. Si hacemos aumentar g_s , G^N aumenta. Entonces la atracción gravitacional entre las distintas partes de la cuerda hace que su longitud decrezca. Además, por otro lado, el radio gravitatorio característico de esa masa aumenta, con lo que la cuerda en algún momento debe formar un agujero negro. Si, por el contrario, tenemos un agujero negro de masa $M \gg M_p$, con M_p la masa de Planck de la teoría efectiva de supergravedad, y hacemos disminuir g_s , M_p aumentará, de forma que llegará un momento en el que $M \sim M_p$. La curvatura en el horizonte se hace del orden de la escala de Planck, con lo que ya no podemos decir que tenemos un agujero negro, pero podemos proponer que, de nuevo, la configuración puede ser descrita por estados de cuerda. La conexión entre la teoría de cuerdas y la física de agujeros negros es, por tanto, la siguiente: la descripción cuerdosa constituye la descripción microscópica del sistema; su tratamiento estadístico y la prolongación a g_s mayor da lugar a la descripción del sistema como solución clásica gravitatoria, que juega el papel de descripción macroscópica.

A primera vista parece que no es posible tal correspondencia, ya que la entropía de los agujeros negros y la de un sistema de muchos grados de libertad en teoría de cuerdas tienen distinta dependencia respecto de la masa del sistema. Consideremos, por ejemplo, un agujero negro de Schwarzschild de masa M_{BH} en $(3+1)d$. El radio del horizonte es $r_H \sim G_4^N M_{BH}$, con lo que la entropía $S_{BH} \sim \frac{A_4}{G_4^N} \sim G_4^N M_{BH}^2$ crece con el cuadrado de la masa. En cambio, supongamos ahora una cuerda excitada de masa similar a la del agujero negro anterior. Entonces $M_{string} \sim \frac{\sqrt{N}}{l_s}$, con N el número de excitación de osciladores que suponemos grande para que $M_{string} \sim M_{BH} \gg M_p = (G_4^N)^{-\frac{1}{2}}$. Hay muchos estados de la cuerda con el mismo número de oscilación N , y, por tanto, representando el mismo estado macroscópico caracterizado por la masa M_{string} . Para N grande, el número de estos estados es $\omega \sim e^{\sqrt{N}}$. La mecánica estadística cuántica nos dice que la conexión entre las dos descripciones, macroscópica y microscópica, la da la relación: $S_{string} = \log \omega \sim \sqrt{N}$, con lo que $S_{string} \sim l_s M_{string}$ crece proporcional a la masa. Aparentemente, la teoría de cuerdas no da el orden de magnitud de estados microscópicos compatibles suficiente para una interpretación estadística de la entropía de los agujeros negros.

La solución a esta aparente contradicción [2] se debe a que, a medida que g_s varía, la masa de la cuerda se mantiene constante en el sistema de unidades de la cuerda, mientras que la masa del agujero negro es constante en el sistema de unidades de

Planck y ya hemos señalado que la relación entre ambos sistemas depende de g_s . Pero la transición de la cuerda a agujero negro ocurre a un valor concreto de g_s , aquel en el que el radio del horizonte $r_H \sim l_s$. Como $r_H \sim G_4^N M_{BH} \propto g_s^2 l_s^2 M_{BH}$, si suponemos que en la transición la masa no cambia ($M_{BH} = M_{string} = M$), entonces $r_H \propto g_s^2 l_s^2 M_{string} \sim g_s^2 l_s \sqrt{N}$. La transición ocurre, por tanto, en

$$g_s \sim N^{-\frac{1}{4}} \quad (1.8)$$

A este valor de g_s , tenemos:

$$S_{BH} \sim G_4^N M^2 \sim g_s^2 l_s^2 M^2 \sim N^{-\frac{1}{2}} N \sim \sqrt{N} \sim S_{string} \quad (1.9)$$

con lo que las entropías son comparables. La cuerda tiene suficientes estados para reproducir la entropía de los agujeros negros.

Invirtamos ahora el razonamiento. Si suponemos que a la g_s de transición los estados de la cuerda son los estados microscópicos que dan la entropía del agujero negro

$$S_{string} = S_{BH} \quad (1.10)$$

entonces se obtiene que $M_{string} \sim M_{BH}$, es decir, la masa no cambia en la transición, salvo como mucho en un factor del orden de la unidad. Podemos así enunciar el principio de correspondencia:

1. Cuando en un agujero negro la distancia característica de los invariantes de curvatura se hace más pequeña que l_s , podemos describir éste mediante una configuración de teoría de cuerdas, con las mismas cargas y momento angular.
2. La masa en esta transición cambia en, como mucho, un factor del orden de la unidad.

El principio de correspondencia proporciona una interpretación estadística de la entropía de los agujeros negros y, en principio, puede aplicarse a cualquier agujero negro. No obstante, se tiene la dificultad de cómo controlar el proceso de disminución de g_s de forma que se pueda hacer una comparación exacta de los coeficientes del orden de la unidad que intervienen en la correspondencia. Afortunadamente, el control es mayor en una clase especial de agujeros negros: aquellas soluciones de supergravedad que son invariantes ante alguna transformación de supersimetría. Al ser BPS, tenemos la garantía de que estas configuraciones existen en la teoría completa (a todos los órdenes en α'). Esta propiedad de ser BPS no cambia al disminuir g_s y, además, conocemos la dependencia de las propiedades de estas configuraciones (masa, carga, etc...) con g_s , relación que no sufre ninguna corrección en α' . A ambos lados del punto de correspondencia la masa está completamente determinada por las cargas, con lo que $M_{string} = M_{BH}$ y el número de estados microscópicos BPS con esas cargas por debajo del punto de

correspondencia ha de ser el mismo que el número de estados por encima del punto de correspondencia [30]. Por ello, en principio uno puede calcular exactamente la entropía de un agujero negro supersimétrico con unas cargas determinadas contando el número de estados BPS a acoplo débil con esas cargas. Sólo necesitamos configuraciones supersimétricas de cuerdas a g_s pequeño que, sepamos, tengan asociadas soluciones de tipo agujero negro a g_s mayor.

Ya hemos visto en la sección anterior que las Dp-branas son objetos que preservan ciertas supersimetrías y que perturbativamente pueden ser descritos mediante cuerdas abiertas ancladas en ellas. Pero, como se ha indicado en la sección anterior, debido a la dualidad “cuerdas abiertas/cuerdas cerradas”, tenemos también una descripción de las Dp-branas en términos de cuerdas cerradas, de forma que éstas, como fuentes del gravitón, del dilatón y de los campos RR, aparecen desde el punto de vista de la teoría efectiva de supergravedad de baja energía como soluciones clásicas asintóticamente planas, denominadas p-branas, cargadas respecto de los campos RR correspondientes. Estas soluciones de supergravedad son válidas en aquellos puntos en los que se verifica que la longitud característica de curvatura es mucho mayor que l_s y que el acoplo efectivo de la cuerda es pequeño. Dado que todas estas soluciones presentan un horizonte, que es singular para $p \neq 3$, estas condiciones se cumplen, para $p \neq 3$, a partir de cierta distancia del horizonte dependiendo de los valores que tomen g_s y N . Si se quiere que este rango sea lo más amplio posible hay que imponer

$$\begin{aligned} Ng_s &\gg 1 \\ g_s &< 1 \end{aligned} \tag{1.11}$$

lo que implica, forzosamente, gran N . En el caso de la D3-brana la solución es válida, incluso en el horizonte, si se imponen las condiciones (1.11). Por otro lado, debido a que N es grande, la descripción microscópica, dada por cuerdas abiertas ancladas en las N Dp-branas, es válida para

$$1 \gg Ng_s \gg g_s \tag{1.12}$$

En conclusión, la solución de supergravedad constituye la descripción macroscópica, válida para $1 > g_s \gg 1/N$, y ésta es complementaria a la descripción microscópica.

La idea consiste, por tanto, en trabajar con compactificaciones de la teoría de cuerdas y buscar configuraciones supersimétricas de branas enrolladas en ciclos compactos de la variedad interna que tengan asociadas soluciones efectivas de tipo agujero negro, con horizonte de área no nula. Es entonces cuando puede hacerse una comparación directa entre la entropía de la solución de supergravedad calculada mediante la ec. (1.6) y la que se obtiene de un tratamiento estadístico de las excitaciones no masivas (ya que la tensión de la brana está fijada macroscópicamente) de las cuerdas abiertas ancladas correspondientes a la descripción microscópica¹. Desde la primera vez que se llevó a

¹Es importante notar que la conexión entre las descripciones macroscópicas y microscópicas tienen

cabo una comparación de este tipo [3] se ha realizado un trabajo extenso encontrándose un acuerdo total, en el límite termodinámico, entre los resultados macroscópico y microscópico². Es más, se han obtenido resultados positivos para algunos agujeros no supersimétricos que constituyen pequeñas desviaciones del carácter BPS, no sólo en el cálculo de la entropía, sino en el de la radiación de Hawking, entendido este último proceso microscópicamente como un proceso de emisión por las branas, en el que las cuerdas abiertas se unen para formar cuerdas cerradas que se propagan hacia el exterior.

1.3. Dualidades de “gran N” de ’t Hooft

La expansión de ’t Hooft [1] de gran N es un análisis perturbativo particular que puede hacerse en teorías con una simetría gauge, por ejemplo $U(N)$, en la que se hace una expansión de la energía libre y los observables físicos en serie de potencias de $1/N$.

Nótese en primer lugar que, mientras que los diagramas de Feynmann estándar son adecuados para el cálculo de los coeficientes de una expansión en potencias del acoplo de Yang-Mills $\sum a_n (g_{YM}^2)^n$, no lo son si lo que se pretende es una expansión en potencias de $1/N$. La dependencia de éstos con N viene de los factores de grupo, con lo que cada diagrama de Feynmann individual da lugar a un polinomio en N que contiene distintas potencias. Es necesario, por tanto, separar cada diagrama de Feynmann en piezas diferentes, cada una con una potencia de N bien definida. El caso en el que la simetría gauge es $U(N)$, lo que tenemos son matrices M_i^j $N \times N$ hermíticas que transforman en la adjunta. Distingamos las componentes complejas $i > j$ y las reales $i = j$. Si denotamos los índices superiores con una flecha hacia atrás y los inferiores con una flecha hacia delante, el propagador se escribe entonces mediante una doble línea, con estructura de grupo $g_{YM}^2 \delta_i^l \delta_k^j$. Por otro lado los vértices en los diagramas de Feynmann sólo dependen de los índices i, j mediante deltas de Kronecker δ_i^j . Esto tiene como consecuencia que la orientación de las líneas se preserve en los vértices. Es, por tanto, coherente escribir los diagramas con una notación de doble línea. De esta forma conseguimos que el número N entre sólo en la expresión de las amplitudes en los lazos de los índices, que dan factores $\sum_i \delta_i^i = N$. Por consiguiente, cada uno de estos diagramas de doble línea, que se denominan “diagramas gordos” (“fat graphs”, o “ribbon graphs”), tiene una potencia bien definida de N y g_{YM}^2 . Es claro que cada diagrama de Feynmann puede dar lugar a distintos “diagramas gordos”, cada uno de ellos con una potencia de N distinta, con lo que hemos conseguido la separación deseada.

que hacerse en el límite termodinámico, en el que los grados de libertad microscópicos se hacen tender a infinito manteniendo reescaladas las distintas magnitudes extensivas.

²Véase, por ejemplo, las revisiones [32].

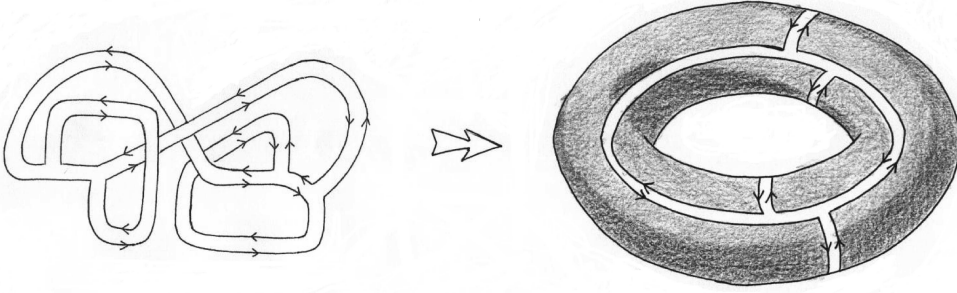


Figura 1.3.1: Ejemplo de “diagrama gordo” con $g = 1$ y $h = 2$.

Es posible organizar el cálculo de las distintas cantidades de la teoría en función de estos “diagramas gordos”. Centrémonos en concreto en aquellos que son conexos, que son los que corresponden a la amplitud vacío-vacío. Cada uno de ellos está caracterizado topológicamente por

1. El número E de propagadores. Cada uno de ellos contribuye como g_{YM}^2 .
2. El número V de vértices. Cada uno de ellos, sea de tres o de cuatro patas contribuye como $(g_{YM}^2)^{-1}$.
3. El número h de lazos. Hemos visto que cada uno contribuye como N .

Por tanto, cada “diagrama gordo” es proporcional a

$$(g_{YM}^2)^{E-V} N^h \quad (1.13)$$

La idea de ‘t Hooft es considerar los “diagramas gordos” como superficies de Riemann con h agujeros, en los que cada lazo represente la frontera de un agujero (véase figura 1.3.1). El género g de la superficie viene dado por la relación topológica

$$2g - 2 = E - V - h \quad (1.14)$$

con lo que cada “diagrama gordo” es proporcional a

$$(g_{YM}^2)^{2g-2+h} N^h = (g_{YM}^2)^{2g-2} t^h \quad (1.15)$$

donde hemos introducido el parámetro de ‘t Hooft $t = N g_{YM}^2$. En conclusión, la energía libre F de la teoría, que se obtiene al sumar todos los “diagramas gordos” conectados, tiene la siguiente expansión perturbativa de ‘t Hooft

$$F = \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} F_{g,h} (g_{YM}^2)^{2g-2} t^h = \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} F_{g,h} N^{2-2g} t^{2g-2+h} \quad (1.16)$$

donde las cantidades $F_{g,h}$ son funciones de todos los parámetros que definen la teoría menos de g_{YM} y de N , y pueden calcularse mediante las reglas habituales de la teoría de perturbaciones.

Consideremos ahora el límite $g_{YM} \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, con t fijo. En este límite es claro que sólo sobreviven los “diagramas gordos” que tienen $g = 0$, es decir, los que se pueden dibujar sobre una superficie que tenga la topología de una esfera. Se denominan diagramas planares, y son proporcionales a N^2 . Los diagramas no planares dan correcciones de orden 1, $1/N^2$, etc... Vemos, por tanto, que en el régimen en el que es válida la expansión de “gran N”, con un t dado fijo, parece haber una descripción equivalente de la teoría gauge en términos de superficies de Riemann cerradas que pueden obtenerse a partir de los “diagramas gordos” llenando los agujeros. Pero estas superficies de Riemann cerradas recuerdan bastante a la hoja de mundo de las cuerdas cerradas. El parecido se hace manifiesto si tenemos en cuenta lo siguiente. Cada contribución a una potencia dada de N viene dada por una serie infinita donde la suma se realiza sobre todos los posibles números h de agujeros, pesados por t^h . Si pudiéramos sumar esta expansión, podríamos introducir la función

$$F_g(t) = \sum_{h=1}^{\infty} F_{g,h} t^h \quad (1.17)$$

y la energía libre podría escribirse como

$$F = \sum_{g=0}^{\infty} (g_{YM}^2)^{2g-2} F_g(t) \quad (1.18)$$

expresión idéntica a la expansión de la amplitud vacío-vacío (1.3) de una teoría de cuerdas cerradas donde g_{YM}^2 juega el papel de la constante de acoplo de la cuerda y t es algún parámetro de background de la teoría de cuerdas. Esto lleva a la idea de ‘t Hooft de que, dada una teoría gauge, uno debería poder encontrar una interpretación de ésta en términos de una teoría de cuerdas en el sentido de que la expansión con respecto a t está resumada para dar la amplitud de cuerda cerrada $F_g(t)$ (ver figura 1.3.2). El sector planar de la teoría gauge corresponde al nivel árbol de la teoría de cuerdas.

1.4. La correspondencia AdS/CFT

Un ejemplo concreto de dualidad de “gran N” es la correspondencia AdS/CFT. Consideremos, en el contexto de la teoría de supercuerdas tipo IIB, un sistema formado por N D3-branas planas paralelas situadas muy cerca unas de otras en el espacio de Minkowski de 10 dimensiones. Supongamos que N es grande para poder disponer tanto de la descripción macroscópica (solución de supergravedad) como de la microscópica

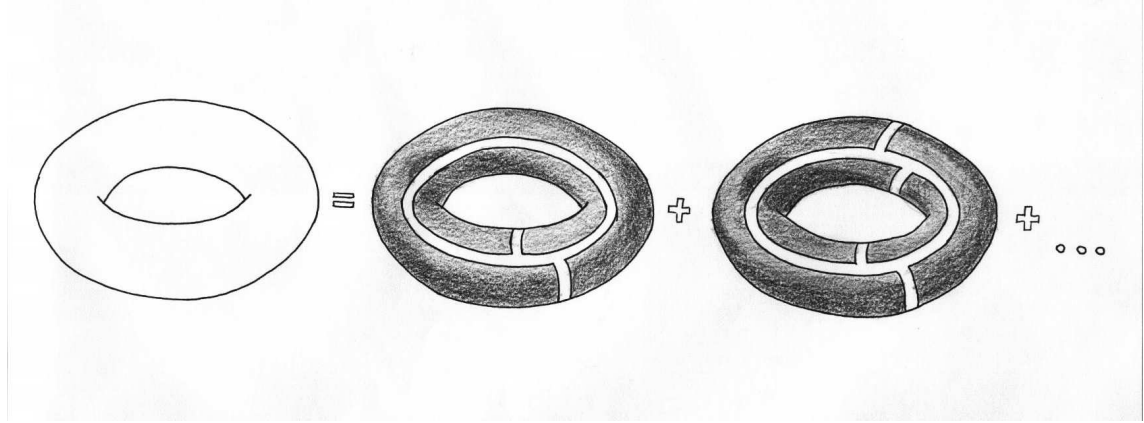


Figura 1.3.2: La amplitud de cuerda cerrada a género 1 interpretada como el resultado de la suma $\sum_{h=1}^{\infty} F_{1,h} t^h$.

(cuerdas abiertas y cerradas). Comencemos por esta última, que, como se ha indicado en la sección 1.2, es válida para

$$1 \gg Ng_s \gg g_s \quad (1.19)$$

y en ella la teoría contiene dos tipos de excitaciones perturbativas: por un lado, cuerdas cerradas moviéndose por todo el espacio-tiempo y, por otro, cuerdas abiertas ancladas en las branas. Tomemos el siguiente límite [4], denominado límite de Maldacena

$$\alpha' \rightarrow 0 \quad (1.20)$$

$$g_{YM}^2 := 4\pi g_s \quad \text{fijo} \quad (1.21)$$

$$U := \frac{r}{\alpha'} \quad \text{fijo} \quad (1.22)$$

$$E := \text{energía de las excitaciones} \quad \text{fija} \quad (1.23)$$

donde r denota la distancia a las branas en el espacio transversal. Claramente, este límite puede tomarse sin alterar la condición (1.19), con lo que es compatible aplicarlo a la descripción microscópica. Se trata de un

- límite de baja energía, pues las condiciones (1.20) y (1.23) implican que los únicos modos que no desacoplan son los no masivos, que pueden considerarse como excitaciones de los campos de la teoría efectiva.
- límite de teoría gauge, ya que la física del sector abierto se reduce a la de la teoría gauge $\mathcal{N} = 4$ $d = 4$ Super Yang-Mills en el que el acoplo g_{YM} se mantiene fijo (1.21) y las excitaciones y los valores esperados en el vacío de los campos $\langle \Phi^i \rangle$ son de valor finito (1.22).
- límite de cerca del horizonte, ya que de las condiciones (1.22) y (1.20) tenemos $r \ll l_s$, es decir, que al tomar este límite estamos situándonos a distancias muy cercanas al horizonte de la solución de supergravedad asociada.

- límite de desacoplo. En este límite la física supergravitosa que viene del sector cerrado se hace libre y se desacopla totalmente de la física gauge que viene del sector abierto.

El resultado consiste, por tanto, en dos sectores totalmente desacoplados: por un lado, campos libres de supergravedad tipo IIB propagándose por todo el espacio de Minkowski de 10 dimensiones, y, por otro, la teoría gauge $\mathcal{N} = 4$ $d = 4$ Super Yang-Mills con grupo gauge $U(N)$ en el volumen de mundo de la brana.

Aumentemos ahora g_s , pasando por el punto de correspondencia, hasta llegar a la zona en la que se verifica que

$$\begin{aligned} Ng_s &\gg 1 \\ g_s &< 1 \end{aligned} \quad (1.24)$$

y, por tanto, es válida la descripción macroscópica. En esta descripción no hay cuerdas abiertas y las cuerdas cerradas se propagan por el background no plano dado por la solución de supergravedad

$$\begin{aligned} ds^2 &= h_3(r)^{-1/2} \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + h_3(r)^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2) \\ \phi &= \phi_0 \\ F_5 &= dh_3(r)^{-1} \wedge dx^0 \wedge \dots \wedge dx^3 + \star (dh_3(r)^{-1} \wedge dx^0 \wedge \dots \wedge dx^3) \end{aligned} \quad (1.25)$$

donde

$$h_3(r) = 1 + \frac{R^4}{r^4} \quad (1.26)$$

siendo $R^4 = 4\pi g_s N l_s^4$. Podemos tomar el límite de Maldacena también en esta descripción, ya que éste también es compatible con la condición (1.24). El resultado es, de nuevo, dos piezas desacopladas: por un lado, excitaciones sin masa propagándose por el espacio de Minkowski de 10d que están totalmente desacopladas [36, 37] de la región cercana al horizonte; por otro, tenemos cualquier tipo de excitación cuerdosa en la región cercana al horizonte. Esta región es $\text{AdS}_5 \times S^5$, y su correspondiente métrica se obtiene apliando el límite de Maldacena a la solución (1.25)

$$\begin{aligned} ds^2 &= ds_{\text{AdS}_5}^2 + ds_{S^5}^2 \\ ds_{\text{AdS}_5}^2 &= R^2 \left[u^2 \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + \frac{du^2}{u^2} \right] \\ ds_{S^5}^2 &= R^2 d\Omega_5^2 \\ \phi &= \phi_0 \\ F_5 &= \mathcal{F}_5 + \star \mathcal{F}_5 \quad , \quad \mathcal{F}_5 = 16\pi g_s (\alpha')^2 N \text{vol}(S^5) \end{aligned} \quad (1.27)$$

donde $ds_{\text{AdS}_5}^2$ es la métrica de AdS_5 en las coordenadas de Poincaré. La relación entre u y U es

$$u = \frac{U}{\sqrt{4\pi g_s N}} \quad (1.28)$$

El motivo por el que, a pesar de ser el límite de Maldacena un límite de baja energía, se tiene todo tipo de excitación cuerdosa en esta región es que la energía E que aparece en la condición (1.23) corresponde a la medida por un observador cuyo tiempo propio viene dado por $t = x^0$, ya que éste es el tiempo propio de la física en las D3-branas en la descripción microscópica (y, por tanto de la teoría gauge). Este tiempo corresponde al tiempo propio de un observador asintótico en la descripción macroscópica. En cambio, el tiempo propio en la región cercana al horizonte en la descripción macroscópica es distinto, produciéndose un corrimiento hacia el rojo de la forma

$$E_{\text{gauge}} \equiv E_{\text{infinito}} = \sqrt{-g_{00}} E_{\text{propio}}|_h = \frac{u}{\sqrt{4\pi g_s N}} E_{\text{propio}}|_h l_s \quad (1.29)$$

de manera que $E_{\text{propio}}|_h$, medido en unidades de la cuerda, es finito en el límite de Maldacena. Otra forma de ver esto es considerar la acción de la cuerda en el background (1.27). Entonces observamos que el factor α' que multiplica a la métrica³ se cancela con el α' de la tensión de la cuerda, obteniéndose una acción de hoja de mundo con longitud característica de la cuerda igual a la unidad a la que, por tanto, no afecta el límite de Maldacena.

Hemos aplicado el límite de Maldacena a dos descripciones distintas de un sistema formado por N D3-branas y, en ambos casos se han obtenido dos teorías totalmente desacopladas, siendo la teoría de campos libres de supergravedad tipo IIB propagándose por todo el espacio de Minkowski de 10 dimensiones una de ellas. La otra, sin embargo, es una teoría gauge en un caso, y la teoría de cuerdas tipo IIB en el background de $\text{AdS}_5 \times S^5$ en el otro. Se trata de dos teorías de naturaleza física muy distinta. No obstante, como los rangos de validez de ambas descripciones (1.19) y (1.24) no solapan, no es descabellado pensar que ambas constituyen descripciones complementarias de la misma física. Se llega así a la correspondencia AdS/CFT [4], que conjetura la equivalencia entre la teoría de cuerdas tipo IIB en el background (1.27), con $R^4 = 4\pi g_s N l_s^4$, y la teoría gauge $U(N)$ superconforme $\mathcal{N} = 4$ $d = 4$ con acoplo de Yang-Mills $g_{YM}^2 = 4\pi g_s$. De hecho, el análisis de las simetrías de ambas teorías muestra concordancia con la conjetura. Así, mientras que la teoría gauge es invariante bajo el grupo conforme en 4 dimensiones $SO(4, 2)$, tiene 16 supergeneradores (cantidad que es doblada si se tienen en cuenta los generadores superconformes) y una simetría R $SU(4)_R \simeq SO(6)_R$, la teoría de cuerdas dual tiene un background con la isometría $SO(4, 2)$ de AdS_5 , 32 supercargas conservadas⁴, y la isometría $SO(6)$ de S^5 . A su vez, la simetría $SL(2, \mathbb{Z})$ de Montonen-Olive que tiene la teoría gauge corresponde con la simetría $SL(2, \mathbb{Z})$ de autodualidad S de la teoría de cuerdas tipo IIB.

Si la conjetura es cierta, ésta propone, para esta teoría gauge y en el contexto de las dualidades de “gran N ” de ‘t Hooft, cuál es su teoría de cuerdas dual a gran N , y el

³Recordemos que $R^2 = \alpha' \sqrt{4\pi g_s N}$

⁴Las 16 supersimetrías adicionales del background surgen como consecuencia de haber tomado el límite de Maldacena.

background sobre la que definirla perturbativamente. En efecto, el acoplo de Yang-Mills g_{YM}^2 de la teoría gauge coincide con el acoplo de la cuerda, y el parámetro de 't Hooft $g_{YM}^2 N$ actúa como el tamaño de AdS_5 y de S^5 . No obstante, la aplicación de forma directa y exacta de la correspondencia para obtener, por ejemplo, la resumación de la serie perturbativa de la teoría gauge se presenta en general imposible. Por un lado, la teoría en la hoja de mundo de la cuerda en el background con métrica no trivial como (1.27) es una teoría no libre que no sabemos cuantizar de forma exacta⁵. Por otro, no sabemos como acoplar a la teoría en la hoja de mundo el flujo de 5-forma RR .

Es posible hacer el mismo razonamiento que hemos expuesto aquí con el sistema de $D3$ -branas para otras configuraciones con menos supersimetría, por ejemplo, configuraciones relacionadas con cuerdas negras en 6 y 5 dimensiones o con la “subida” a teoría M de los agujeros negros Calabi-Yau cuadridimensionales que estudiamos en esta tesis. En todos los casos se llega a la conjetura de que una determinada compactificación de una teoría de cuerdas/teoría M concreta, en un espacio concreto $AdS_{n+1} \times$ espacio compacto, es dual de la correspondiente CFT_n en la brana.

De la forma en la que hemos introducido la conjetura, como una dualidad de gran N , parecería indicar que AdS/CFT no postula una equivalencia total entre ambas teorías, si no que la equivalencia se da, aunque a cualquier valor finito de $g_{YM}^2 N$, sólo en el régimen en el que es válida la expansión de “gran N ”. Esto significa que lo que aquí actúan como correcciones en α' , que son correcciones en $\frac{1}{g_{YM}^2 N}$, no estropearían la equivalencia, pero sí que podrían estropear la equivalencia los efectos no perturbativos en g_s . La versión fuerte de la conjetura, es decir, la suposición de que la correspondencia es cierta más allá de la expansión de “gran N ”, trae consigo el que puedan aparecer en el lado AdS todo tipo de objetos no perturbativos de teoría de cuerdas, de forma que sólo podría asegurarse que el background es AdS asintóticamente. La versión más débil, en cambio, postula la equivalencia tanto a N grande como a acoplo de 't Hooft grande, situación en la que la teoría de cuerdas en AdS se reduce a la teoría efectiva de supergravedad clásica. De hecho, es en este último caso límite donde la correspondencia ha sido más explotada, mediante la comparación de cantidades protegidas por supersimetría en ambos lados de la dualidad. Al igual que con los modelos microscópicos para los agujeros negros, el cálculo de las cantidades protegidas ha de dar el mismo resultado en ambas descripciones, pero no así el de las cantidades no protegidas, ya que los regímenes de validez de ambas descripciones ((1.24) y (1.19)) son distintos.

El que las dos teorías sean equivalentes significa que debe existir un mapa preciso que relacione los estados de la teoría de cuerdas con los operadores de la teoría gauge conforme. Nótese que el espacio AdS tiene una frontera conforme en $U \rightarrow \infty$ conformemente equivalente al espacio de Minkowski en el que está definida la CFT . Además, la

⁵Aunque hasta la fecha no se conoce como obtener de forma general una solución exacta en α'/R^2 de la teoría de cuerdas, sí que se han hecho progresos interesantes en ciertos límites cinemáticos [33–35].

métrica de AdS tiene la propiedad de que permite intercambiar información entre esta frontera y el espacio interior en un tiempo finito. Por tanto, la función de partición de la teoría de cuerdas en AdS es un funcional de los valores de frontera de todos los campos (de supergravedad, asociados a estados cuerdosos perturbativos masivos o incluso no perturbativos) de la teoría. La equivalencia entre ambas teorías se entiende como una correspondencia campo/operador [5,6]: la función de partición de la teoría de cuerdas en AdS es igual al funcional generador de funciones de correlación en la teoría conforme, en el que el valor de frontera de cada campo de la teoría de cuerdas actúa como fuente de su operador asociado en la teoría conforme. Teniendo en cuenta esta correspondencia campo/operador, la conjetura AdS/CFT puede establecerse como una equivalencia entre las funciones de partición

$$Z_{\text{AdS}} = Z_{\text{CFT}} \quad (1.30)$$

La versión fuerte de la conjetura postula que la relación (1.30) es una igualdad exacta. Z_{AdS} puede ser considerada como la integral de camino euclídea, a la que contribuyen distintas geometrías (con condiciones de frontera dadas), pesadas de distinta forma según el valor de su acción euclídea. Esta acción euclídea debe incluir (si quisiéramos hacer la comparación exacta) contribuciones de series infinitas de términos de orden mayor en las derivadas (higher derivative terms). Pero esto no es todo, puesto que sería necesario incluir todas las posibles excitaciones sobre cada una de las geometrías (estados de cuerdas y branas enrolladas). Una vez tenidas en cuenta todas esas contribuciones en Z_{AdS} es cuando se espera que se verifique (1.30) de forma exacta. Esta versión fuerte de la correspondencia puede interpretarse, por tanto, como una definición no perturbativa de la teoría de cuerdas para ciertos espacios que son asintóticamente AdS.

Capítulo 2

Agujeros negros Calabi-Yau y el mecanismo del atractor

Las compactificaciones de la teoría de supercuerdas 10-dimensionales en variedades de tipo Calabi-Yau de 3 dimensiones complejas (CY_3) son importantes porque permiten encontrar vacíos de la teoría en los que permanezcan sin romperse algunas supersimetrías de la teoría 10-dimensional. Esto se debe a que admiten una métrica Ricci-plana con conexión de spin de holonomía un subgrupo de $SU(3)$. Es posible encontrar, por tanto, algún espinor covariantemente constante. En ausencia de “impurezas” en la variedad interna, como branas o flujos, estos espinores corresponden a aquellas supersimetrías que no están rotas en la teoría efectiva cuatridimensional. En particular la compactificación de la teoría tipo IIB en un Calabi-Yau da lugar a una teoría cuatridimensional con supersimetría, como mínimo, $\mathcal{N} = 2$.

En este capítulo introducimos los agujeros negros “Calabi-Yau” como soluciones de tipo “Reissner-Nordstrom” de la teoría efectiva 4-dimensional que resulta de la compactificación de la teoría tipo IIB en variedades CY_3 . En la sección 2.1 definimos qué es una variedad CY y enumeramos algunas de sus propiedades. Los agujeros negros CY se introducen en la sección 2.2. El caso extremal, en el que se verifica el mecanismo del atractor, se trata en la sección 2.3. En concreto, escribimos las ecuaciones del atractor en términos de las coordenadas de una 3-forma $\gamma \in H^3(CY, \mathbb{Z})$. Las características del flujo del atractor en el caso de que el agujero negro sea supersimétrico se resumen en la sección 2.4. Por último, comentamos algunos aspectos acerca de la correspondencia agujeros negros/cuerdas para este tipo de agujeros negros en la sección 2.5.

2.1. Variedades Calabi-Yau y su espacio de moduli de estructuras complejas

Una variedad compacta compleja M es de tipo Calabi-Yau si verifica simultáneamente las dos condiciones siguientes¹:

- Es Kähler. Esto quiere decir que su métrica g_{mn} es hermitica (compatible con la estructura compleja J^n_m de la variedad) y que la 2-forma $J_{mn} = J^n_m g_{pn}$ es cerrada

$$dJ = 0 \quad (2.1)$$

Nótese que, en coordenadas complejas, las únicas componentes distintas de cero de la forma de Kähler son $J_{\mu\bar{\nu}} = J^\sigma_\mu g_{\sigma\bar{\nu}} = ig_{\mu\bar{\nu}}$, con lo que J es una $(1,1)$ -forma cerrada. Dado que M es compacta y que su forma de volumen es proporcional a $J \wedge J \wedge J$, la clase de cohomología de J , denominada clase de Kähler, no puede ser nula.

- La primera clase de Chern asociada al recubrimiento tangente c_1 es nula

$$c_1 = 0 \quad (2.2)$$

El hecho de que la variedad sea Kähler implica una serie de simplificaciones:

- Los laplacianos asociados a las derivadas exteriores ∂ y $\bar{\partial}$ son iguales a

$$\partial\partial^\dagger + \partial^\dagger\partial = \bar{\partial}\bar{\partial}^\dagger + \bar{\partial}^\dagger\bar{\partial} = \frac{1}{2}(dd^\dagger + d^\dagger d) =: \frac{1}{2}\Delta \quad (2.3)$$

con lo que sus respectivos grupos de cohomología $H^p_q(M)$ y $H^p_{\bar{q}}(M)$ son isomorfos. Los denotamos por tanto de la misma manera $H^{p,q}(M)$.

- En cada parche U_a existe un escalar real φ_a , que no está bien definido globalmente, tal que $g_{\mu\bar{\nu}} = \partial_\mu \bar{\partial}_\nu \varphi_a$, denominado potencial de Kähler.
- La conexión hermitica coincide con la de Christoffel y en esta conexión $d^\dagger J = 0$. J es, por tanto, armónica.
- El tensor de curvatura es simétrico en sus índices holomorfos y antiholomorfos, y las únicas componentes no nulas de la 2-forma de Ricci son $\mathcal{R}_{\mu\bar{\nu}} = \partial_\mu \bar{\partial}_\nu \log \sqrt{g}$. Esta ecuación implica que \mathcal{R} es cerrada, pero no necesariamente exacta, ya que \sqrt{g} no es una función escalar. Es por ello que tiene sentido definir c_1 como la clase de cohomología de \mathcal{R} .

El hecho de que, además, $c_1 = 0$ implica que:

- Existe, en cada clase de Kähler, una métrica Ricci-plana única² (teorema de Yau).

¹Para una exposición más detallada remitimos al lector a las refs. [39, 40].

²Nótese que, si c_1 fuera distinta de cero, M no podría admitir una métrica Ricci-plana.

En lo que sigue suponemos que ésta es precisamente la métrica de M .

- El grupo de holonomía de M es un subgrupo de $SU(3)$. Esto implica que M admite como mínimo un par de espinores covariantemente constantes y bien definidos globalmente, de quiralidad opuesta.
- M admite una $(3,0)$ -forma no nula en toda la variedad cuyas componentes $\Omega_{\mu\nu\rho}$ son funciones holomorfas de la posición. Además Ω es la única $(3,0)$ -forma armónica (salvo multiplicación por una constante), y es covariantemente constante en la métrica Ricci-plana.
- El diamante de Hodge es (si el número de Euler $\chi = 2(h_{1,1} - h_{2,1})$ es no nulo)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & h^{0,0} & & & & 1 \\
 & & h^{1,0} & h^{0,1} & & 0 & 0 \\
 & h^{2,0} & h^{1,1} & h^{0,2} & 0 & h^{1,1} & 0 \\
 h^{3,0} & h^{2,1} & h^{1,2} & h^{0,3} & = 1 & h^{2,1} & h^{2,1} & 1 \\
 & h^{3,1} & h^{2,2} & h^{1,3} & 0 & h^{1,1} & 0 \\
 & h^{3,2} & h^{2,3} & & 0 & 0 \\
 & & h^{3,3} & & & 1
 \end{array} \quad (2.4)$$

con $h^{1,1} \geq 1$, $h^{2,1} \geq 0$.

Típicamente lo que se tiene es que las variedades CY aparecen como familias multidimensionales de variedades, difeomorfas como variedades reales, caracterizadas cada una de estas familias por un espacio de moduli. Dado que hay una única métrica Ricci-plana para cada par estructura compleja-clase de Kähler, el espacio de moduli de cada familia es el espacio de todas las estructuras complejas y clases de Kähler posibles. Es difícil describir este espacio de moduli de forma global. Nos centramos aquí en describir la parte de estructura compleja de este espacio de moduli (que denotamos como \mathcal{M}) de forma local. Fijar una estructura compleja concreta supone especificar el subespacio unidimensional $H^{3,0}(M)$ de $H^3(M)$, que es el subespacio al que pertenece la clase de cohomología de la 3-forma holomorfa Ω . Si fijamos una base simpléctica de $H_3(M)$, esto es, un conjunto de 3-ciclos de homología (A^I, B_J) con $I, J = 0, 1, \dots, h_{2,1}$ tales que sus números de intersección sean

$$\#(A^I, A^J) = 0 \quad (2.5)$$

$$\#(B_I, B_J) = 0 \quad (2.6)$$

$$\#(A^I, B_J) = \delta_J^I \quad (2.7)$$

la clase de cohomología de Ω viene fijada por los periodos

$$X^I := \int_{A^I} \Omega \quad (2.8)$$

$$F_I := \int_{B^I} \Omega \quad (2.9)$$

En términos de la base $(\beta^I, -\alpha_J)$ del espacio de cohomología $H^3(M)$ que es dual Poincaré de la base anterior podemos escribir la clase de cohomología de Ω como

$$\Omega = X^I \alpha_I + F_J \beta^J \quad (2.10)$$

Las variaciones en la estructura compleja de M corresponden a variaciones en la métrica con índices puros $\delta g_{\mu\nu} + \text{cc}$. En efecto, este tipo de perturbaciones hacen que la métrica modificada ya no sea hermítica con respecto a la estructura compleja de partida, pero sí lo es con respecto a una estructura compleja modificada que se pueda obtener mediante el cambio de variables no holomorfo apropiado. La imposición de que la nueva métrica sea Ricci-plana implica que la forma $\Omega_{\mu\nu\rho} g^{\rho\bar{\rho}} \delta g_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}$ es una $(2,1)$ -forma cerrada. Así mismo, dos perturbaciones en la métrica que correspondan a la misma clase de cohomología de $H^{2,1}(M)$ corresponden, con la redefinición adecuada de coordenadas, a la misma métrica perturbada. Es por ello que hay una perturbación de la estructura compleja independiente por cada elemento linealmente independiente de $H^{2,1}(M)$. Además, si consideramos que estos cambios de estructura compleja son infinitesimales, a primer orden el cambio en la clase de cohomología de Ω viene dado por un elemento de $H^{3,0} \oplus H^{2,1}$. Dado que una estructura compleja dada determina la clase de cohomología de Ω salvo factor multiplicativo constante, los posibles cambios a primer orden en la estructura compleja vienen dados por los elementos de $H^{2,1}(M)$. De todo esto se concluye que el espacio tangente $T_P^{(1,0)} \mathcal{M}$ a una estructura compleja dada P es isomorfo a $H^{2,1}(M)$ y el espacio de moduli \mathcal{M} tiene dimensión compleja $h_{2,1}$.

Dado que $\dim(\mathcal{M}) = h_{2,1}$, los periodos X^I pueden considerarse como coordenadas proyectivas de \mathcal{M} , de tal forma que los otros periodos F_J han de poder expresarse en función de X^I . Usando el hecho de que las formas $\partial_I \Omega := \frac{\partial \Omega}{\partial X^I}$, que constituyen una base de $H^{3,0} \oplus H^{2,1}$, no tienen componentes ni $(1,2)$ ni $(0,3)$ tenemos la ecuación

$$\int_M \Omega \wedge \partial_I \Omega = 0 \quad (2.11)$$

Aplicando a esta ecuación la relación bilineal de Riemann

$$\int_M \Lambda \wedge \Psi = \int_{A^I} \Lambda \int_{B^I} \Psi - \int_{B^I} \Lambda \int_{A^I} \Psi \quad (2.12)$$

se obtiene

$$F_I = \partial_I F_o \quad (2.13)$$

donde F_o es una función holomorfa de las X^I y homogénea de grado 2 denominada prepotencial de M . Por tanto, el conjunto de todas las posibles 3-formas holomorfas $\Omega \subset H^3(M, \mathbb{C})$, que denotamos por L , constituye una subvariedad lagrangiana de $H^3(M, \mathbb{C})$.

El espacio \mathcal{M} tiene estructura de variedad de Kähler, con potencial de Kähler

$$K = -\log \left(-i \int \Omega \wedge \bar{\Omega} \right) \quad (2.14)$$

Debido a la relación (2.13) K se puede escribir en términos del prepotencial

$$K = -\log [i (\bar{X}^I F_I - X^I \bar{F}_I)] = -\log (-2\bar{X}^I \text{Im}\tau_{IJ} X^J) =: -\log K_e(X, \bar{X}) \quad (2.15)$$

donde $\tau_{IJ} = \partial_I F_J$. La variedad \mathcal{M} es, por tanto, Kähler especial. Usando coordenadas no proyectivas $z^i, \bar{z}^{\bar{j}}$ (o $t^i, \bar{t}^{\bar{j}}$, usaremos ambas notaciones), con $i = 1, 2, \dots, h_{2,1}$, en \mathcal{M} , la métrica de \mathcal{M} puede escribirse

$$G_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 K}{\partial t^i \partial \bar{t}^{\bar{j}}} =: \partial_i \partial_{\bar{j}} K \quad (2.16)$$

En general, el potencial de Kähler cambiará en la intersección de dos parches de la forma

$$K_{(a)} = K_{(b)} + f_{ab}(t) + \bar{f}_{ab}(\bar{t}) \quad (2.17)$$

Como una estructura compleja dada específica Ω salvo factor multiplicativo constante, podemos considerar Ω como una sección holomorfa del recubrimiento lineal $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$, con funciones de transición

$$\Omega_{(a)} = e^{f_{ab}(t)} \Omega_{(b)} \quad (2.18)$$

La conexión asociada a este recubrimiento es $\partial_i K dt^i$, con lo que la derivada covariante para secciones de \mathcal{L} es

$$\mathcal{D}_i \Omega = \left(\frac{\partial}{\partial t^i} + \partial_i K \right) \Omega \quad (2.19)$$

Las cantidades $\mathcal{D}_i \Omega$ forman una base de $H^{2,1}(M)$.

2.2. Agujeros negros Calabi-Yau

El tipo de agujeros negros sobre los que trata el presente trabajo (agujeros negros Calabi-Yau) son agujeros negros diónicos en (3+1)d, que se obtienen como ciertas soluciones de la teoría efectiva 3+1-dimensional que resulta de la compactificación de la teoría de cuerdas tipo IIB en una variedad M tipo CY_3 . La descripción cuerdosa microscópica de estos agujeros negros viene dada por una $D3$ -brana enrollada en un 3-ciclo de homología de M

$$\mathcal{C}_{p,q} = q_I A^I - p^J B_J \in H_3(M, \mathbb{Z}) \quad (2.20)$$

Vamos a suponer que la variedad M en la que parcialmente está enrollada la $D3$ -brana se encuentra situada en un punto concreto de su espacio de moduli (el vacío elegido). En particular, denotamos este punto en \mathcal{M} por $(z_\infty, \bar{z}_\infty)$.

La descripción macroscópica del sistema viene dada, en cambio, por la correspondiente solución de la teoría efectiva de baja energía. Si la holonomía de M es exactamente $SU(3)$, se trata de la teoría de supergravedad $\mathcal{N} = 2$ $d = 4$ no gaugeada cuyo contenido de materia “on shell” viene dado por [41]

- El multiplete de supergravedad $\mathcal{N} = 2$, que contiene al gravitón, dos gravitinos y un vector gauge $U(1)$ (denominado gravifotón).
- $n_v = h_{2,1} = h$ multipletes vectoriales $U(1)$, cada uno conteniendo un vector gauge, un par de espinores (de Majorana o de Weyl) y un escalar complejo z^i , que parametriza el espacio de moduli \mathcal{M} de estructuras complejas en M .
- $h_{1,1}$ hipermultipletes neutrales, cada uno conteniendo dos espinores y cuatro escalares reales, dos de los cuales parametrizan el espacio de moduli de estructura de Kähler generalizada de M .
- Un hipermultiplete neutral (el multiplete universal), en el que dos de los cuatro escalares reales son el dilatón y el axi6n.

Aquí sólo nos interesa el sector de la lagrangiana efectiva correspondiente a los multipletes vectoriales. Éste viene totalmente especificado por el prepotencial $F_o(X)$ de M :

$$-\frac{R}{2} + G_{i\bar{j}} \partial_m z^i \partial_n \bar{z}^{\bar{j}} g^{mn} + \text{Im} \mathcal{N}_{IJ} \mathcal{F}_{mn}^I \mathcal{F}_{lr}^J g^{ml} g^{nr} + \text{Re} \mathcal{N}_{IJ} \mathcal{F}_{mn}^I * \mathcal{F}_{lr}^J g^{ml} g^{nr} \quad (2.21)$$

donde

$$\mathcal{N}_{IJ} = \bar{\tau}_{IJ} + 2i \frac{\text{Im} \tau_{IK} X^K \text{Im} \tau_{JL} X^L}{X^M \text{Im} \tau_{MN} X^N} \quad (2.22)$$

y \mathcal{F}^I son los tensores “campo electromagnético” asociados a los $n_v + 1$ campos gauge $U(1)$. Si denotamos por $G_I = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{F}^I}$ los tensores duales se tiene

$$\int_{A^I} F_5 = \mathcal{F}^I \quad (2.23)$$

$$\int_{B_I} F_5 = G_I \quad (2.24)$$

Nótese que $\text{Im} \mathcal{N}_{IJ}$ es una matriz definido-negativa que da los acoplos gauge como función de los moduli z^i . Un hecho a señalar es que en este caso de supergravedad $d = 4$ $\mathcal{N} = 2$ hay un teorema de no renormalización [41] que asegura que, a todo orden en teoría de perturbaciones, la geometría del espacio de moduli de los multipletes vectoriales no depende de los escalares de los hipermultipletes. Dado que en este caso no sólo el dilatón, sino también los moduli de estructura de Kähler, pertenecen a los hipermultipletes, esto implica que la métrica $G_{i\bar{j}}$ del espacio de moduli de estructura compleja es exacta en g_s y α' a todo orden en teoría de perturbaciones.

Dado que hemos obtenido esta teoría como una descripción efectiva de una teoría de cuerdas más completa, podemos considerar en ésta objetos que contengan tanto cargas eléctricas como magnéticas. Del hecho de que F_5 sea autodual y de la libertad de elegir la base simpléctica (A_I, B^J) se tiene la simetría eléctrica-magnética de la

teoría. En concreto, la acción completa es invariante bajo el grupo de transformaciones $\in Sp(2n_v + 2, \mathbb{R})$, ante el cual los pares

$$\begin{pmatrix} X^I \\ F_I \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} \mathcal{F}^I \\ G_I \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

transforman como vectores.

Nótese que esta teoría efectiva es una extensión de la teoría de Einstein-Maxwell. Los agujeros negros en los que estamos interesados son generalizaciones de las soluciones de Reissner-Nordstrom de la teoría de Einstein-Maxwell. La métrica de Reissner-Nordstrom

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f^{-1}(r)dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (2.26)$$

donde $f = \frac{(r-r_+)(r-r_-)}{r^2}$, $r_{\pm} = M \pm r_0$ y $r_0 = +\sqrt{M^2 - Q^2}$, puede escribirse, si usamos la coordenada $r = r_- - \frac{r_0 e^{-r_0 \tau}}{\sinh(r_0 \tau)}$, como

$$ds^2 = e^{2U} dt^2 - e^{-2U} \left[\frac{r_0^4}{\sinh^4(r_0 \tau)} d\tau^2 + \frac{r_0^2}{\sinh^2(r_0 \tau)} d\Omega^2 \right] \quad (2.27)$$

con $e^{2U} = \left(1 + \frac{r_-}{2r_0} - \frac{r_-}{2r_0} e^{2r_0 \tau}\right)^{-2} e^{2r_0 \tau}$. El horizonte externo está localizado en $r = r_+$. Una revisión detallada de este agujero negro puede encontrarse, por ejemplo en la ref. [42]. Aquí nos limitamos simplemente a señalar que su entropía de Bekenstein-Hawking es $S_{\text{BH}} = A/4 = \pi r_+^2$ y su temperatura es $T = \frac{r_0}{2\pi r_+^2}$. En el límite extremal se tiene $M = Q$, $r_0 = 0$ y $\tau = -\frac{1}{r-M}$, con lo que la métrica queda

$$ds^2 = e^{2U} dt^2 - e^{-2U} \left[\frac{1}{\tau^4} d\tau^2 + \frac{1}{\tau^2} d\Omega^2 \right] \quad (2.28)$$

con $e^{2U} = \frac{1}{(1-M\tau)^2}$.

Para obtener la generalización deseada consideramos el siguiente tipo de métrica 4-dimensional estática y esféricamente simétrica

$$ds^2 = e^{2U} dt^2 - e^{-2U} \left[\frac{c^4}{\sinh^4(c\tau)} d\tau^2 + \frac{c^2}{\sinh^2(c\tau)} d\Omega^2 \right] \quad (2.29)$$

donde ahora c juega el papel de r_0 , e imponemos que el flujo de F_5 -forma generado por el agujero negro tenga una parte interna en M dada por la 3-forma de cohomología Poincaré dual de $\mathcal{C}_{p,q}$

$$\gamma_{p,q} = p^I \alpha_I + q_I \beta^I \in H^3(M, \mathbb{Z}) \quad (2.30)$$

Esto implica que las cantidades p^I y q_I son respectivamente las cargas magnética y eléctrica del agujero negro bajo los distintos campos gauge \mathcal{F}^I

$$\int_{S^2} \mathcal{F}^I = \int_{S^2} \int_{A^I} F_5 \propto \int_{A^I} \gamma_{p,q} = p^I \Rightarrow p^I \propto \frac{1}{G_N} \int_{S^2} \mathcal{F}^I \quad (2.31)$$

$$\int_{S^2} G_I = \int_{S^2} \int_{B_I} F_5 \propto \int_{B_I} \gamma_{p,q} = q_I \Rightarrow q_I \propto \frac{1}{G_N} \int_{S^2} G^I \quad (2.32)$$

Nótese que

$$\begin{pmatrix} p^I \\ q_I \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

es un vector simpléctico. La condición de cuantización de Dirac (en unidades de Planck)

$$q'_I p^I - p'^I q_I \in \mathbb{Z} \text{ (sin suma)} \quad (2.34)$$

rompe el grupo simpléctico a $Sp(2n_v + 2, \mathbb{Z})$. Podemos, por tanto, identificar la red de posibles cargas eléctricas y magnéticas con $H^3(M, \mathbb{Z})$ mediante la expresión (2.30)³, esto es, podemos considerar las cargas p^I y q_I como coordenadas de γ en la base simpléctica $(\beta, -\alpha)$. Si definimos el producto simpléctico en $H^3(M, \mathbb{C})$ mediante

$$\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle := \int_M \gamma_1 \wedge \gamma_2 = \sharp(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) = p_1^I q_{2I} - p_2^I q_{1I} \quad (2.36)$$

la condición de cuantización de Dirac implica que $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle \in \mathbb{Z}$. Nótese que este producto, además de ser antisimétrico, es topológico (independiente de los moduli de M).

Asímismo, consideramos que en este tipo de soluciones los moduli de estructura de Kähler del Calabi-Yau se mantienen constantes, pero los de estructura compleja z^i toman distintos valores a medida que varía la distancia al agujero negro, partiendo de unos valores asintóticos dados en el infinito (que son los correspondientes al vacío elegido $(z_\infty, \bar{z}_\infty)$). Puede verse [43] que, bajo todas estas condiciones, la lagrangiana 1-dimensional que gobierna la evolución radial de $U(\tau)$, $z^i(\tau)$ y $\bar{z}^{\bar{i}}(\tau)$ es

$$\mathcal{L} = \left(\frac{dU}{d\tau} \right)^2 + G_{i\bar{j}} \frac{dz^i}{d\tau} \frac{d\bar{z}^{\bar{j}}}{d\tau} + e^{2U} V_{\text{BH}}(z, \bar{z}, p, q) \quad (2.37)$$

con la ligadura

$$\left(\frac{dU}{d\tau} \right)^2 + G_{i\bar{j}} \frac{dz^i}{d\tau} \frac{d\bar{z}^{\bar{j}}}{d\tau} - e^{2U} V_{\text{BH}}(z, \bar{z}, p, q) = c^2 \quad (2.38)$$

La función $V_{\text{BH}}(z, \bar{z}, p, q)$ se denomina “potencial del agujero negro” y viene dada por

$$V_{\text{BH}} := |Z_{p,q}(z)|^2 + |\mathcal{D}_i Z_{p,q}(z)|^2 \quad (2.39)$$

donde

$$Z_{p,q} := e^{\frac{K(X, \bar{X})}{2}} W_{p,q}(X) \quad (2.40)$$

$$W_{p,q}(X) := \int_{\mathcal{C}_{p,q}} \Omega = \int_M \Omega \wedge \gamma = X^I q_I - p^I F_I \quad (2.41)$$

³Obsérvese que, debido al efecto Witten, las cargas conservadas son

$$\begin{pmatrix} P^I \\ Q_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^I \\ q_I - \text{Re} \mathcal{N}_{IJ} p^J \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

y

$$\mathcal{D}_i Z_{p,q}(z) = \left(\partial_i + \frac{1}{2} \partial_i K \right) Z_{p,q}(z) \quad (2.42)$$

Nótese que $Z_{p,q}(X, \bar{X})$ es una combinación de los moduli z^i que asintóticamente, en el infinito, toma el valor de la carga del agujero negro asociada al gravifotón, carga que coincide con la carga central del agujero negro en el álgebra de supersimetría. Nótese también que $|\mathcal{D}_i Z_{p,q}(z)|^2 = 4|\partial_i Z_{p,q}(z)|^2$. Las ecuaciones de movimiento para los moduli z^i que se obtienen de la lagrangiana (2.37) son

$$\partial_\tau^2 z^i + \Gamma_{jk}^i \partial_\tau z^j \partial_\tau z^k = G^{i\bar{j}} e^{2U} \frac{\partial V_{BH}}{\partial \bar{z}^{\bar{j}}} \quad (2.43)$$

Consideremos el caso general no extremal en el que $c \neq 0$. La imposición de que la solución tenga un horizonte de área finita A en $\tau \rightarrow -\infty$ nos conduce a

$$e^{-2U} \rightarrow \frac{A}{4\pi} \frac{e^{-2c\tau}}{4c^2} \quad (2.44)$$

Si hacemos el cambio de coordenadas

$$\rho = 2e^{c\tau} \quad (2.45)$$

podemos escribir la métrica en la región cercana al horizonte como

$$ds^2 = \frac{4\pi}{A} c^2 \rho^2 (dt)^2 - \frac{A}{4\pi} (d\rho)^2 - \frac{A}{4\pi} d\Omega^2 \quad (2.46)$$

Se observa que ρ es la coordenada que da la distancia física al horizonte (en unidades de $r_H = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$), que está localizado en $\rho = 0$. En esta región cercana al horizonte las ecuaciones de movimiento para z^i se escriben

$$\frac{\partial z^i}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 z^i}{\partial \rho^2} + \Gamma_{jk}^i \rho \frac{\partial z^j}{\partial \rho} \frac{\partial z^k}{\partial \rho} = \rho \frac{4\pi}{A} G^{i\bar{j}} \frac{\partial V_{BH}}{\partial \bar{z}^{\bar{j}}} \quad (2.47)$$

de donde se concluye que

$$\left. \frac{\partial z^i}{\partial \rho} \right|_h = 0 \quad (2.48)$$

$$\left. \frac{\partial^2 z^i}{\partial \rho^2} \right|_h = \frac{4\pi}{A} G^{i\bar{j}} \frac{\partial V_{BH}}{\partial \bar{z}^{\bar{j}}} \quad (2.49)$$

El valor de los moduli z^i en el horizonte va a depender de los valores fijados en el infinito. Obsérvese que en este caso no extremal no podemos obtener ninguna relación entre $V_{BH}|_h$ y A de la ligadura (2.38). Estas dos últimas proposiciones no van a ser ciertas cuando analizemos el caso extremal. Por otro lado, la condición de que la solución es asintóticamente Minkowski en el infinito se traduce en $U \rightarrow \tau M$ cuando $\tau \rightarrow 0^-$, donde M es la masa ADM de la solución. Esto implica que

$$M^2 = |Z_{p,q}(z_\infty, \bar{z}_\infty)|^2 + c^2 + |\mathcal{D}_i Z_{p,q}(z_\infty, \bar{z}_\infty)|^2 - G_{i\bar{j}} \left(\frac{dz^i}{d\tau} \right)_\infty \left(\frac{d\bar{z}^{\bar{j}}}{d\tau} \right)_\infty \quad (2.50)$$

2.3. El caso extremal y las ecuaciones del atractor

En el caso extremal ($c = 0$) tenemos, en cambio,

$$ds^2 = e^{2U} dt^2 - e^{-2U} \left[\frac{1}{\tau^4} d\tau^2 + \frac{1}{\tau^2} d\Omega^2 \right] \quad (2.51)$$

Podemos usar las coordenadas $|\vec{x}| = -1/\tau$ y escribir

$$ds^2 = e^{2U} dt^2 - e^{-2U} [d|\vec{x}|^2 + |\vec{x}|^2 d\Omega^2] \quad (2.52)$$

La condición de horizonte de area finita en $\tau \rightarrow -\infty$ conduce en este caso a

$$e^{-2U} \rightarrow \frac{A}{4\pi} \tau^2 \quad (2.53)$$

Si usamos la coordenada

$$w := -\log(-\tau) \quad (2.54)$$

la métrica de la región cercana al horizonte es

$$ds^2 = \frac{4\pi}{A} e^{2w} (dt)^2 - \frac{A}{4\pi} (dw)^2 - \frac{A}{4\pi} d\Omega^2 \quad (2.55)$$

Con la coordenada

$$u := \frac{4\pi}{A} \frac{1}{\tau} = -\frac{4\pi}{A} e^w \quad (2.56)$$

la métrica (2.55) se escribe

$$ds^2 = R_h^2 \left(-\frac{du^2}{u^2} + u^2 dt^2 \right) - R_h^2 d\Omega^2 \quad (2.57)$$

La solución cercana al horizonte es, por tanto, el espacio $AdS_2 \times S^2$, en el que

$$R_{AdS_2} = R_{S^2} = R_h := \sqrt{\frac{A}{4\pi}} \quad (2.58)$$

y donde (u, t) son las coordenadas de Poincaré de AdS_2 .

De la ecuación (2.55) vemos que en este caso la distancia física al horizonte, al menos en la región cercana a éste, viene dada por w , y que, debido a que el horizonte está localizado en $w \rightarrow -\infty$, todo punto que corresponda a un valor finito de w va a estar localizado a distancia infinita del horizonte. Por otra parte, se espera físicamente que todos los campos escalares con todas sus derivadas con respecto a la distancia física w tiendan a un límite finito en el horizonte. Como el horizonte está localizado en $w = -\infty$, entonces, si la primera derivada de z^i tendiera a un límite distinto de cero en el horizonte, z^i divergería conforme nos acercamos al horizonte. Este razonamiento conduce a que en todas las soluciones extremales físicamente razonables todas las

derivadas de z^i con respecto a w deben ser cero en el horizonte. Como las ecuaciones de movimiento para z^i en la región cercana al horizonte se escriben

$$\frac{\partial z^i}{\partial w} + \frac{\partial^2 z^i}{\partial w^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{\partial z^j}{\partial w} \frac{\partial z^k}{\partial w} = \frac{4\pi}{A} G^{i\bar{j}} \frac{\partial V_{\text{BH}}}{\partial \bar{z}^{\bar{j}}} \quad (2.59)$$

se sigue que [44–46]

$$\left. \frac{\partial V_{\text{BH}}}{\partial \bar{z}^{\bar{j}}} \right|_h = 0 \quad (2.60)$$

La ec. (2.60) implica que los valores de los moduli z^i en el horizonte están completamente determinados por las cargas del agujero negro y son independientes de los valores asintóticos z_∞^i . El punto correspondiente del espacio de moduli $(z_{p,q}^i, \bar{z}_{p,q}^{\bar{i}})$ se denomina “punto del atractor”. En este caso extremal de la ligadura (2.38) se obtiene que

$$\frac{1}{\tau^2} - \frac{4\pi}{A} V_{\text{BH}}|_h \frac{1}{\tau^2} = 0 \quad (2.61)$$

es decir, que el valor que V_{BH} toma en el punto del atractor es igual a la entropía de Bekenstein-Hawking del agujero negro

$$S_{\text{BH}} := \frac{A}{4} = \pi V_{\text{BH}}|_h \quad (2.62)$$

Vemos, por tanto, que el mecanismo del atractor asegura que la entropía del agujero negro viene dada en función de las cargas (p^I, q_I) y no de parámetros continuos como los moduli en el infinito. Este hecho es un requerimiento necesario para que pueda haber acuerdo con la entropía microscópica del agujero negro: las entropías de los agujeros negros que se obtienen del conteo microscópico en teoría de cuerdas son de forma natural invariantes bajo pequeños cambios en los parámetros continuos $(z_\infty, \bar{z}_\infty)$.

En la sección anterior hemos visto que podemos considerar las cargas del agujero negro p^I y q_I como coordenadas de una 3-forma $\gamma \in H^3(M, \mathbb{Z})$ en una base simpléctica dada. Dado un valor concreto de los moduli de estructura compleja $(z^i, \bar{z}^{\bar{i}})$ podemos parametrizar γ con las coordenadas (λ^{-1}, x^i) , que denominamos de Kähler, y que se definen mediante

$$\gamma = \lambda^{-1} \Omega + x^i \mathcal{D}_i \Omega + cc \quad (2.63)$$

siendo Ω la 3-forma holomorfa que corresponde al punto dado (z, \bar{z}) . La relación entre las cargas (p, q) y la coordenadas de Kähler es

$$p^I = 2\text{Re} (X^I \lambda^{-1} + x^i \mathcal{D}_i X^I) \quad (2.64)$$

$$q_I = 2\text{Re} (F_I \lambda^{-1} + x^i \mathcal{D}_i F_I) \quad (2.65)$$

Un hecho a destacar es que podemos reescribir las ecuaciones del atractor (2.60) puramente en términos de las coordenadas de Kähler asociadas al agujero negro. Si escribimos $W_{p,q}(X)$ y sus derivadas covariantes en términos de las coordenadas (λ^{-1}, x^i) en la estructura compleja dada por $(X^I, \bar{X}^{\bar{I}})$

$$W_{p,q}(X) = \int_M \Omega \wedge \gamma_{p,q} = \bar{\lambda}^{-1} \int_M \Omega \wedge \bar{\Omega} = i \bar{\lambda}^{-1} e^{-K} \quad (2.66)$$

$$\mathcal{D}_i W_{p,q}(X) = \int_M \mathcal{D}_i \Omega \wedge \gamma_{p,q} = \bar{x}^{\bar{j}} \int_M \mathcal{D}_i \Omega \wedge \bar{\mathcal{D}}_{\bar{j}} \bar{\Omega} = -i \bar{x}^{\bar{j}} G_{i\bar{j}} e^{-K} \quad (2.67)$$

y usamos

$$\partial_i V_{\text{BH}} = e^K \mathcal{D}_i [|W_{p,q}(X)|^2 + |\mathcal{D}_j W_{p,q}|^2] \quad (2.68)$$

$$\mathcal{D}_i |\mathcal{D}_j W_{p,q}|^2 = \bar{W}_{p,q} \mathcal{D}_i W_{p,q} + \bar{\mathcal{D}}_{\bar{j}} \bar{W}_{p,q} G^{\bar{j}i} \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j W_{p,q} \quad (2.69)$$

y

$$\mathcal{D}_i \mathcal{D}_j W_{p,q} = \partial_i \mathcal{D}_j W_{p,q} + \partial_i K \mathcal{D}_j W_{p,q} + \Gamma_{ij}^k \mathcal{D}_k W_{p,q} = x^k \int_M \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j \Omega \wedge \mathcal{D}_k \Omega = i x^k C_{ijk} \quad (2.70)$$

donde $C_{ijk} = C_{IJK} \mathcal{D}_i X^I \mathcal{D}_j X^J \mathcal{D}_k X^K$ y $C_{IJK} = \partial_I \partial_J \partial_K F_o$, el resultado que se obtiene es

$$\pi V_{\text{BH}} = \pi e^{-K} |\lambda^{-1}|^2 + \pi e^{-K} x^i \bar{x}^{\bar{j}} G_{i\bar{j}} \quad (2.71)$$

$$\pi \partial_i V_{\text{BH}} = -2\pi e^{-K} \lambda^{-1} G_{i\bar{j}} \bar{x}^{\bar{j}} - \pi x^i x^k C_{ijk} \quad (2.72)$$

$$\pi \partial_{\bar{i}} V_{\text{BH}} = -2\pi e^{-K} \bar{\lambda}^{-1} G_{\bar{i}j} x^j - \pi \bar{x}^{\bar{i}} \bar{x}^{\bar{k}} C_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} \quad (2.73)$$

Por tanto, los extremos de V_{BH} verifican

$$\bar{x}^{\bar{j}} = -\frac{e^K}{2\lambda^{-1}} G^{\bar{j}i} C_{ikl} x^l x^k \quad (2.74)$$

$$x^j = -\frac{e^K}{2\bar{\lambda}^{-1}} G^{j\bar{i}} \bar{C}_{\bar{i}kl} \bar{x}^{\bar{l}} \bar{x}^{\bar{k}} \quad (2.75)$$

Nótese que la ec. (2.74) viene de imponer $\partial_i V_{\text{BH}} = 0$, mientras que (2.75) viene de $\partial_{\bar{i}} V_{\text{BH}} = 0$. Si sustituimos la ec. (2.75) en $\partial_i V_{\text{BH}} = 0$ se encuentra que [47]

$$M_i^j G_{j\bar{i}} \bar{x}^{\bar{i}} = 0 \quad (2.76)$$

donde

$$M_i^j := 4|\lambda^{-1}|^2 e^{-K} \delta_i^j - e^K C_{ikl} \bar{C}_{\bar{i}kl} G^{\bar{k}j} G^{k\bar{i}} x^l \bar{x}^{\bar{l}} \quad (2.77)$$

Existen, por consiguiente, dos posibilidades

- Si $\det M \neq 0$, entonces $x^i = 0$ (solución trivial). Este caso corresponde a las soluciones supersimétricas. Lo estudiamos en la siguiente sección.
- $\det M = 0$ (solución no trivial). Este caso corresponde a las soluciones extremales que no son supersimétricas. La ec. (2.76) nos permite, si fijamos el gauge de Kähler, obtener las funciones $X^I(\lambda^{-1}, x^i, \bar{\lambda}^{-1}, \bar{x}^{\bar{i}})$. Estas funciones, junto con las ecuaciones (2.64) y (2.65) nos permiten encontrar entonces el punto del atractor $X_{p,q}$. No obstante, nótese que se trata de un problema nada trivial. Por un lado el sistema de ecuaciones (2.76), (2.64) y (2.65) es altamente no lineal, de tal forma que es difícil obtener soluciones explícitas para un CY general. Por otro,

no todas las $X_{p,q}$ que se obtiene por este procedimiento son verdaderos puntos del atractor, ya que a la condición (2.60) hay que añadirle el que $X_{p,q}$ se trate de un verdadero mínimo de V_{BH} . Mientras que toda solución supersimétrica es realmente un mínimo de V_{BH} , esto no tiene por qué ser cierto para el resto de soluciones extremales [45, 48, 49].

2.4. Flujo del atractor BPS

Si, además, el agujero negro es supersimétrico, la condición de que la solución preserve supersimetría $\mathcal{N} = 1$ implica que se satisface el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden [50], denominadas ecuaciones del flujo del atractor BPS

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dw} &= e^{U-w} |Z_{p,q}| \\ \frac{dz^i}{dw} &= 2e^{U-w} G^{i\bar{j}} \bar{\partial}_{\bar{j}} |Z_{p,q}|\end{aligned}\tag{2.78}$$

Dado que, en el horizonte, $\frac{dz^i}{dw} = 0$, la segunda ec. implica

$$\mathcal{D}_i Z_{p,q}|_h = 0\tag{2.79}$$

es decir, $x^i|_h = \bar{x}^{\bar{j}}|_h = 0$. La única coordenada de Kähler no trivial en el horizonte es λ^{-1} y su relación con las cargas viene dada por

$$p^I = 2\text{Re}(\lambda_{p,q;at}^{-1} X^I)\tag{2.80}$$

$$q_I = 2\text{Re}(\lambda_{p,q;at}^{-1} F_I)\tag{2.81}$$

Vemos, por tanto, que, si tenemos en cuenta que cada punto concreto de \mathcal{M} fija una descomposición de Hodge concreta

$$H^3(M) = H^{3,0} \oplus H^{2,1} \oplus H^{1,2} \oplus H^{0,3}\tag{2.82}$$

el mecanismo del atractor para los agujeros negro CY supersimétricos fija los moduli z^i en el horizonte de tal forma que se verifica [53]

$$\gamma_{p,q} = 2\text{Re}(\lambda_{p,q;at}^{-1} \Omega) \in H^{3,0} \oplus H^{0,3}\tag{2.83}$$

Por otro lado, dado que en el infinito $U \rightarrow \tau M$, de la primera de las ecs. (2.78) se tiene

$$M^2 = |Z_{p,q}(z_\infty, \bar{z}_\infty)|^2\tag{2.84}$$

ecuación que pone de manifiesto que se satura la cota BPS. Como

$$|Z_{p,q}| = e^{\frac{K}{2}} \left| \int_{\mathcal{C}_{p,q}} \Omega \right|\tag{2.85}$$

la ec. (2.84) implica también que el 3-ciclo $\mathcal{C}_{p,q}$, en el que está entrollada la D3-brana en la descripción microscópica, es una subvariedad lagrangiana especial, es decir

$$J|_{\mathcal{C}_{p,q}} = 0 \quad (2.86)$$

$$\text{Vol}(\mathcal{C}_{p,q}) \propto \int_{\mathcal{C}_{p,q}} \Omega \quad (2.87)$$

Si $W_{p,q}(X)$ no se anula en ningún punto del flujo del atractor podemos definir

$$C = 2ie^{-U+w} e^{\frac{\kappa}{2}} \sqrt{\frac{\bar{W}_{p,q}(X)}{W_{p,q}(X)}} \quad (2.88)$$

y escribir las $2h_{2,1}+1$ ecuaciones (2.78) en términos de las siguientes $2h_{2,1}+2$ ecuaciones

$$\frac{dX^I}{dw} = CX^I + i(\text{Im}\tau)^{-1IJ} \frac{\bar{\partial}\bar{W}_{p,q}(\bar{C}\bar{X})}{\partial(\bar{C}\bar{X})^J} \quad (2.89)$$

Tomando la parte real por un lado y, por otro, multiplicando la ec. (2.89) por τ_{IJ} y tomando despues la parte real se llega a

$$\begin{aligned} \text{Re}(CX^I) &= p^I + \frac{d}{dw} [\text{Re}(CX^I)] \\ \text{Re}(CF_I) &= q_I + \frac{d}{dw} [\text{Re}(CF_I)] \end{aligned} \quad (2.90)$$

Podemos resumir estas dos ecuaciones en una ecuación que iguala clases de cohomología

$$\text{Re}(C\Omega) = \gamma_{p,q} + \frac{d}{dw} [\text{Re}(C\Omega)] \quad (2.91)$$

De la primera de las ecs (2.78) se obtiene

$$\frac{d}{dw} (e^{-U+w}) = e^{-U+w} - |Z_{p,q}|^2 \quad (2.92)$$

Por otro lado, en el horizonte

$$e^{-U+w} = \sqrt{\frac{A}{4\pi}} \quad (2.93)$$

$$V_{\text{BH}} = |Z_{p,q}|^2 = \frac{A}{4\pi} \quad (2.94)$$

Por tanto,

$$\left. \frac{d}{dw} (e^{-U+w}) \right|_h = 0 \quad (2.95)$$

Como también $\left. \frac{dX}{dw} \right|_h = 0$, se tiene entonces que Ω en el horizonte satisface la ecuación en clases de cohomología

$$\text{Re}[C\Omega] = \gamma_{p,q} \quad (2.96)$$

donde $C = 2i\bar{W}_{p,q}(\bar{X})e^K$ en el horizonte. Obsérvese que esto nos permite conocer el valor de la coordenada de Kähler λ^{-1} en el punto del atractor

$$\lambda_{p,q;at}^{-1} = i\bar{W}_{p,q}(\bar{X})e^K \quad (2.97)$$

Las $2h_{2,1} + 2$ ecuaciones

$$\begin{aligned} p^I &= \text{Re}[CX^I] \\ q_I &= \text{Re}[CF_I] \end{aligned} \quad (2.98)$$

a las que da lugar la ec. (2.96) se conocen como las ecuaciones del atractor BPS y fueron obtenidas por primera vez en las refs. [43, 51, 52]. La entropía de Bekenstein-Hawking es en este caso

$$\begin{aligned} S_{\text{BH}} &= \pi V_{\text{BH}}|_h = \pi |Z_{p,q}(X)|^2|_h = -\frac{\pi}{2} \text{Im}\tau_{IJ}(X)|C|^2 X^I \bar{X}^I \Big|_{p,q} = \\ &= i\frac{\pi}{2} F_0(CX) - i\frac{\pi}{2} \bar{F}_0(\bar{C}\bar{X}) + \frac{\pi}{2} q_I \phi^I \end{aligned} \quad (2.99)$$

donde $\phi^I = 2\text{Im}CX^I$ y donde las cantidades CX^I están evaluadas en el punto del atractor.

Para completar el análisis indiquemos que, si llamamos α_W al argumento de $W_{p,q}(X)$, y si escribimos la ec. (2.91) en función de la coordenada τ se tiene

$$\frac{d}{d\tau} \text{Im} \left(2e^{-U} e^{-i\alpha_W} e^{\frac{K}{2}} \Omega \right) = \gamma_{p,q} \quad (2.100)$$

Aunque es posible integrar esta ecuación directamente para hallar

$$\text{Im} \left(2e^{-U} e^{-i\alpha_W} e^{\frac{K}{2}} \Omega \right) = \gamma_{p,q}\tau + \text{Im} \left(2e^{-U} e^{-i\alpha_W} e^{\frac{K}{2}} \Omega \right) \Big|_{\tau=0} \quad (2.101)$$

no es posible obtener analíticamente en general una solución explícita $(U(\tau), z^i(\tau))$ salvo en los casos más sencillos. El motivo por el que las $2h_{2,1} + 2$ ecuaciones (2.89), (2.90), (2.91) o (2.100) son equivalentes a las $2h_{2,1} + 1$ ecuaciones (2.78) se debe a que no todas las $2h_{2,1} + 2$ ecs. son independientes. En efecto, si multiplicamos escalarmente la ec. (2.100) por $\gamma_{p,q}$ (utilizando el producto simpléctico), obtenemos

$$\frac{d}{d\tau} \text{Im} \left(2e^{-U} e^{-i\alpha_W} e^{\frac{K}{2}} W_{p,q} \right) = 0 \quad (2.102)$$

lo que no nos aporta ninguna información nueva ya que $e^{i\alpha_W} = W/|W|$.

2.5. La correspondencia agujeros negros CY/cuerdas

En esta sección revisamos algunos aspectos de la descripción microscópica que da la teoría de cuerdas para los agujeros negros Calabi-Yau BPS. Ya hemos dicho que

ésta consiste en una $D3$ -brana enrollada en un 3-ciclo lagrangiano especial cuya clase de homología hemos denotado por $\mathcal{C}_{p,q} \in H_3(M, \mathbb{Z})$. Determinar las condiciones de existencia de soluciones de las ecuaciones del flujo del atractor BPS que hemos visto en la sección anterior para un CY general constituye un problema nada trivial, que depende fuertemente de los valores elegidos de las cargas $\gamma_{p,q}$ y de los moduli en el infinito z_∞^i . El hecho de que no todas las posibles $\gamma_{p,q}$ tengan asociadas una solución no es sorprendente si se tiene en cuenta que también en la teoría de cuerdas el espectro BPS constituye sólo un subconjunto de toda la red de cargas. Parece, por tanto, natural conjeturar [53] que la versión agujeros negros/cuerdas para este tipo de agujeros negros es una correspondencia uno a uno (salvo, por supuesto, la degeneración que da lugar a la entropía) entre soluciones a las ecuaciones del flujo del atractor y estados BPS de tipo $D3$ -brana enrollada de la teoría de cuerdas completa. Sin embargo, esta conjetura de Moore ha resultado ser errónea, teniéndose ejemplos [54, 55] en los cuales se sabe que el estado BPS ha de existir en teoría de cuerdas pero no existe la solución correspondiente a las ecuaciones del flujo del atractor BPS, incluso en regímenes donde la aproximación de supergravedad es válida. No obstante, si se quiere seguir afirmando que la teoría de cuerdas proporciona una descripción microscópica de los agujeros negros parece crucial poder encontrar un acuerdo entre la descripción supergravitosa y la microscópica de teoría de cuerdas para este tipo de agujeros negros.

La solución a esta paradoja fue descubierta por Denef [56, 57]: la conjetura de Moore puede ser válida si no hacemos la restricción de que la solución de supergravedad sea esféricamente simétrica y consideramos también soluciones de tipo multi-agujero negro formadas por distintas cargas separadas en equilibrio. En efecto, de las ecs. del flujo del atractor BPS para las soluciones esféricamente simétricas que hemos visto en la sección anterior se deduce que

$$\frac{de^U}{d\tau} = e^{2U} |Z_{p,q}| > 0 \quad (2.103)$$

$$\frac{d|Z_{p,q}|}{d\tau} = 4e^U \partial_i |Z_{p,q}| G^{i\bar{j}} \bar{\partial}_{\bar{j}} |Z_{p,q}| > 0 \quad (2.104)$$

es decir, que e^U y $|Z_{p,q}|$ son monóticamente decrecientes a medida que nos acercamos al horizonte. Puede ocurrir, por tanto, que $|Z_{p,q}|$ se haga cero en un punto $\tau = \tau_0$ antes de llegar al horizonte. Recordemos que para pasar de las ecs. (2.78) a las ecs. (2.89), (2.90), (2.91) y (2.100) hemos supuesto que $|Z_{p,q}|$ es distinto de cero en todo el flujo del atractor. Por tanto, al llegar a este punto ya no podemos aplicar las ecs. (2.89), (2.90), (2.91) y (2.100) y hay que recurrir a (2.78). Esta situación puede corresponder a dos casos:

- No existe solución a las ecuaciones del flujo del atractor BPS.
- $(z^i(\tau_0), \bar{z}^{\bar{i}}(\tau_0))$ es un punto de \mathcal{M} de tipo “conifold” en el que el ciclo $\mathcal{C}_{p,q}$ colapsa a cero volumen. En este caso los estados BPS de teoría de cuerdas correspon-

dientes a D3-branas enrolladas en $\mathcal{C}_{p,q}$ se vuelven no-masivos, de manera que la aproximación de supergravedad que hemos estado utilizando hasta ahora deja de ser válida. De hecho, si se fuerza continuar la solución más allá de τ_0 lo que se obtiene es una solución con singularidad desnuda que no tiene significado físico. Para conocer qué ocurre físicamente al llegar a este punto hay que considerar la teoría efectiva modificada para incluir a estas partículas ligeras [58, 59]. Ocurre aquí un fenómeno parecido al que se da en el mecanismo del “*enhanceon*” [60]. Al igual que ocurre en la ref. [60], en este caso también es posible obtener una solución de las ecs. (2.78) si imponemos que, para $\tau < \tau_0$, U y z^i son constantes. Estas soluciones se denominan de tipo “agujero vacío” y resultan ser soluciones que corresponden a una configuración multicentro en la que la carga total (p^I, q_J) está distribuida en la superficie de la esfera $\tau = \tau_0$.

En general las configuraciones supersimétricas multicentro corresponden a una métrica

$$ds^2 = e^{2U} (dt + \vec{\omega} \cdot d\vec{x})^2 - e^{-2U} d\vec{x} \cdot d\vec{x} \quad (2.105)$$

en la que U , z^i y $\vec{\omega}$ son funciones de (x_1, x_2, x_3) . Las ecuaciones del flujo del atractor en este caso son

$$\text{Im} \left(2e^{-U} e^{-i\alpha} e^{\frac{K}{2}\Omega} \right) = H(\vec{x}) \quad (2.106)$$

$$*_3d d_3d \omega = \langle d_3d H, H \rangle \quad (2.107)$$

donde $H(\vec{x})$ es una función armónica en \mathbb{R}^3 que toma valores en $H^3(M, \mathbb{R})$, y donde α es ahora un campo independiente, pero que debe tender al argumento de $\sum_{\text{cargas}} W$ cuando $|\vec{x}| \rightarrow +\infty$. Para el caso en el que hay n cargas localizadas en \vec{x}_r , con $r = 1, \dots, n$ se tiene

$$H(\vec{x}) = - \sum_{r=1}^n \frac{\gamma_r}{|\vec{x} - \vec{x}_r|} + \text{Im} \left(2e^{-U} e^{-i\alpha_W} e^{\frac{K}{2}\Omega} \right) \Big|_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \quad (2.108)$$

donde α_W es el argumento de $\sum_r W_{p_r, q_r}$. Cada solución a estas ecuaciones se denomina “flujo del atractor bifurcado” ya que, cerca de cada carga γ_r , o lejos de todas ellas, tiende a la del flujo del atractor esféricamente simétrico. Obsérvese también que se trata de soluciones estacionarias, pero en general no estáticas, ya que pueden tener momento angular intrínseco \vec{w} , al tratarse de sistemas de tipo “electrón-monopolo”. La existencia de este tipo de soluciones está sujeta a determinadas condiciones de estabilidad que dependen de los moduli asintóticos elegidos. En efecto, de la ec. (2.107) se tiene que

$$\langle \Delta_{3d} H, H \rangle = 0 \quad (2.109)$$

Esta última ecuación implica que

$$\sum_{s=1}^n \frac{\langle \gamma_r, \gamma_s \rangle}{|\vec{x}_r - \vec{x}_s|} = - \text{Im} \left(2e^{-U} e^{-i\alpha_W} Z_{p_r, q_r} \right) \Big|_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \quad (2.110)$$

Estas condiciones de estabilidad están acordes con condiciones similares encontradas en el lado microscópico [61–63]. En la ref. [64] se muestra cómo construir explícitamente este tipo de soluciones multicentro.

La existencia de este tipo de configuraciones multicentro de agujeros negros ligados implica que la entropía no está siempre determinada por las cargas, sino que también puede depender de forma discontinua de los moduli en el infinito: si, dada cierta carga (p, q) asociada a una solución esféricamente simétrica, existe una región en el espacio de moduli dentro de la cual sea posible también una solución multicentro, entonces la entropía asociada a la carga (p, q) va a sufrir un salto discontinuo al pasar al interior de esa región. Todo esto hace que la correspondencia agujeros negros/cuerdas para este tipo de agujeros negros sea bastante complicada. Se trata de un tema en el que no vamos a profundizar en esta tesis. Remitimos al lector interesado al trabajo reciente [80] y a las referencias que contiene.

Tampoco vamos a entrar en el interesante tema del estudio de la correspondencia *AdS/CFT* asociada a estos agujeros negros. La geometría del espacio AdS_2 posee la propiedad especial de tener dos fronteras, en vez de una, como ocurre en los casos de dimensión más alta, y la correspondencia en este caso no se entiende bien. El conteo de la entropía para estos agujeros negros tuvo que hacerse [9] en una descripción 11-dimensional, en teoría M, en la que, al compactificar en el Calabi-Yau, el agujero negro es una cuerda negra en 5-dimensiones. La geometría cercana al horizonte de la cuerda negra es $AdS_3 \times S^2 \times M_{\text{mirror}}$ y tiene una *CFT* asociada que es una $d = 2$ $\mathcal{N} = (0, 4)$ SCFT. El conteo de microestados en esta teoría da como resultado, en el límite termodinámico (límite de cargas grandes), una entropía que coincide con la que proporciona la fórmula (2.99).

Capítulo 3

Cuerdas topológicas y las correcciones a la entropía

Comenzamos este capítulo dando una breve introducción, en la sección 3.1, de la materia sobre la que se centra el presente trabajo: las cuerdas topológicas. Éstas constituyen una versión simplificada del sector de la teoría de supercuerdas correspondiente a las 6 dimensiones compactas (también llamado “sector interno”), en la que la teoría superconforme de la hoja de mundo se reduce a una teoría topológica, y en la que la dependencia que tienen las amplitudes en la métrica de background del espacio blanco se reduce a un tipo concreto de parámetros de moduli. La característica que más nos interesa es la denominada “anomalía holomorfa”: las amplitudes de cuerdas topológicas tienen una dependencia no-holomorfa en los moduli del espacio blanco. Como veremos en el capítulo siguiente, esta dependencia es crucial para que la función de partición de la teoría tenga estructura de función de onda. En la sección 3.2 discutimos por qué la dependencia anti-holomorfa puede interpretarse como una “background-dependencia”.

Por otro lado, como hemos indicado en el capítulo anterior, hay un acuerdo total, en el límite termodinámico, entre la entropía de Bekenstein-Hawking asociada a los agujeros negros Calabi-Yau supersimétricos, obtenidos como solución de la teoría efectiva cuatridimensional de supergravedad, y la entropía microscópica obtenida mediante la descripción cuerdosa de éstos. Pero mediante la teoría de cuerdas podemos también calcular correcciones adicionales a esta teoría efectiva cuatridimensional de supergravedad que, aunque despreciables a bajas energías, se hacen importantes si las cargas del agujero negro no son demasiado grandes. Estas correcciones dependen fuertemente de la topología de la variedad compacta M y dan lugar a correcciones a la entropía macroscópica del agujero negro

$$S = \frac{1}{4}A + a_1 \log A + a_2 \frac{1}{A^2} + \dots \quad (3.1)$$

En las secciones 3.3 y 3.4 revisamos brevemente estas correcciones a la entropía,

obtenidas mediante el método de Wald [71], para los agujeros negros CY supersimétricos.

Aparte de esto, teniendo en cuenta el origen microscópico cuerdoso de la entropía de los agujeros negros podemos obtener, si vamos más allá del límite termodinámico en el conteo microscópico, una expansión similar

$$S = b_0 A + b_1 \log A + b_2 \frac{1}{A^2} + \dots \quad (3.2)$$

Se hace, por tanto, interesante estudiar el posible acuerdo entre los coeficientes a_i y b_i para tratar de entender el origen microscópico de las correcciones (3.1) y estudiar así la validez de la correspondencia agujeros negros/teoría de cuerdas. No se trata de un problema sencillo. Debido al hecho de que, más allá del límite termodinámico, las transformadas de Laplace de la física estadística y las de Legendre de la termodinámica dan resultados distintos, los distintos colectivos estadísticos no son equivalentes más allá de este límite. Es en este contexto en el que han surgido conjeturas como la de Ooguri-Strominger-Vafa (OSV) [10], que introducimos en la sección 3.5.

3.1. Algunas nociones de cuerdas topológicas

Como ya hemos señalado a comienzos del capítulo, las cuerdas topológicas son una versión simplificada del sector de la teoría de supercuerdas correspondiente a las 6 dimensiones compactas, en la que la teoría superconforme de la hoja de mundo se reduce a una teoría topológica, y en la que la dependencia que tienen las amplitudes en la métrica de background del espacio blanco se reduce a un tipo concreto de parámetros de moduli. En esta sección describimos de forma resumida qué significa esto. Para una descripción más detallada, véase el contenido y las referencias de los reviews [68–70].

Comencemos con la teoría que vive en la hoja de mundo Σ_g . Al ser Σ_g una variedad Riemanniana bidimensional orientable su grupo de estructura es $SO(2) = U(1)$. Los vectores del espacio tangente complexificado en este caso no forman una representación irreducible. En efecto, el recubrimiento tangente complexificado se puede descomponer en suma de dos recubrimientos de dimensión compleja 1 cada uno $T\Sigma_g = T^+\Sigma_g \oplus T^-\Sigma_g$, cuyas funciones de transición son complejas conjugadas. Lo mismo ocurre con el recubrimiento de espín. Esto implica que, en cada estructura de espín, cada espinor “fundamental” se puede descomponer en dos componentes con cargas opuestas bajo $U(1)$. Debido a esta descomposición el superespacio correspondiente a la supersimetría global $\mathcal{N} = 2$ que tiene la teoría en la hoja de mundo viene dado por las coordenadas

$$(w, \bar{w}), (\theta^+, \bar{\theta}^-), (\theta^-, \bar{\theta}^+) \quad (3.3)$$

Hemos agrupado estas coordenadas por pares complejos conjugados. Los signos \pm en las coordenadas fermiónicas indican que la carga frente a $U(1)$ es $\pm 1/2$. El contenido de

materia del modelo sigma no lineal de la teoría en la hoja de mundo se puede agrupar en tres campos quirales Φ^μ , con $\mu = 1, 2, 3$,

$$\bar{D}_\pm \Phi^\mu = 0 \quad (3.4)$$

donde

$$\bar{D}_\pm \equiv -\frac{\partial^\pm}{\partial \bar{\theta}} + i\theta^\pm \partial_\pm \quad (3.5)$$

siendo $\partial_+ \equiv \partial_w$ y $\partial_- \equiv \partial_{\bar{w}}$. Además la acción puede escribirse como un término- D

$$S = t \int d^2w d^4\theta K(\Phi, \bar{\Phi}) = -t \int d^2w \frac{\partial^2 K}{\partial \phi^\mu \partial \bar{\phi}^\nu} h^{ab} \partial_a \phi^\nu \partial_b \phi^\mu + \dots \quad (3.6)$$

donde h_{ab} es la métrica en Σ_g y t es el parámetro que hace de \hbar^{-1} . Se observa que la función real K hace de potencial de Kähler para el espacio blanco M en las coordenadas complejas $(\phi^\mu, \bar{\phi}^\mu)$. M es, por tanto, una variedad Kähler de 3 dimensiones complejas.

El paso a cuerdas topológicas consiste en hacer que una de estas dos simetrías del superespacio

$$Q_A \equiv \bar{Q}_+ + Q_- = -\frac{\partial^+}{\partial \bar{\theta}} - i\theta^+ \partial_+ + \frac{\partial^-}{\partial \theta} + i\bar{\theta}^- \partial_- \quad (3.7)$$

$$Q_B \equiv \bar{Q}_+ + \bar{Q}_- = -\frac{\partial^+}{\partial \bar{\theta}} - i\theta^+ \partial_+ - \frac{\partial^-}{\partial \theta} - i\bar{\theta}^- \partial_- \quad (3.8)$$

actúe como operador BRST. Pero, para que estas transformaciones sean simetrías de la teoría, el parámetro asociado a la transformación, que es espinorial, ha de ser covariantemente constante para cualquier métrica general de Σ_g . La forma de conseguir esto es redefinir el grupo de estructura $U(1)$ de forma que, o bien el parámetro asociado a Q_A , o bien el de Q_B , sea un escalar constante. Esto se consigue redefiniendo el nuevo operador de rotación como

$$M_A \equiv M - F_V \quad (3.9)$$

$$M_B \equiv M - F_A \quad (3.10)$$

donde

$$M \equiv 2w\partial_+ - 2\bar{w}\partial_- + \theta^+ \frac{\partial}{\partial \theta^+} - \theta^- \frac{\partial}{\partial \theta^-} + \bar{\theta}^+ \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^+} - \bar{\theta}^- \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^-} \quad (3.11)$$

es el antiguo generador de rotaciones, y

$$F_V \equiv -\theta^+ \frac{\partial}{\partial \theta^+} - \theta^- \frac{\partial}{\partial \theta^-} + \bar{\theta}^+ \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^+} + \bar{\theta}^- \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^-} \quad (3.12)$$

$$F_A \equiv -\theta^+ \frac{\partial}{\partial \theta^+} + \theta^- \frac{\partial}{\partial \theta^-} + \bar{\theta}^+ \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^+} - \bar{\theta}^- \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^-} \quad (3.13)$$

son los generadores vectorial y axial de la simetría R. A este procedimiento se le denomina “twist topológico”. Hay dos formas inequivalentes, (3.9) y (3.10), de twistear

la teoría, y esto da lugar a las dos versiones de cuerdas topológicas que hay: el modelo A (3.9) y el modelo B (3.10).

El presente trabajo versa sobre el modelo B, el cual pasamos a describir. Con la nueva definición de las rotaciones (3.10) los espinores ψ_{\pm}^{μ} del supercampo Φ^{μ} transforman como $(1, 0)$ y $(0, 1)$ -formas de la hoja de mundo. Los denotamos como ρ_w^{μ} , $\rho_{\bar{w}}^{\mu}$. En cambio, los espinores $\bar{\psi}_{\pm}^{\bar{\mu}}$ de $\bar{\Phi}^{\bar{\mu}}$ se convierten en escalares en la hoja de mundo¹ y los denotamos por

$$\eta^{\bar{\mu}} = \bar{\psi}_+^{\bar{\mu}} + \bar{\psi}_-^{\bar{\mu}} \quad (3.14)$$

$$\theta_{\mu} = g_{\mu\bar{\nu}} (\bar{\psi}_+^{\bar{\nu}} - \bar{\psi}_-^{\bar{\nu}}) \quad (3.15)$$

Una vez integrados los campos auxiliares F^{μ} la densidad lagrangiana puede escribirse

$$L = -it\{Q_B, V\} - t \left(i\theta_{\mu}(\Delta_{\bar{w}}\rho_w^{\mu} - \Delta_w\rho_{\bar{w}}^{\mu}) + \frac{1}{2}R_{\mu\bar{\nu}\sigma}^{\rho}\rho_w^{\mu}\rho_{\bar{w}}^{\sigma}\eta^{\bar{\nu}}\theta_{\rho} \right) \quad (3.16)$$

donde Δ_{\pm} son las derivadas covariantes actuando sobre ρ^{μ} y

$$V = g_{\mu\bar{\nu}} (\rho_w^{\mu}\partial_{\bar{w}}\bar{\phi}^{\bar{\nu}} + \rho_{\bar{w}}^{\mu}\partial_w\bar{\phi}^{\bar{\nu}}) \quad (3.17)$$

Ahora la teoría tiene una simetría escalar Q_B tal que $Q_B^2 = 0$. El primer término en (3.16) es Q_B -exacto, mientras que el segundo puede escribirse como una $(1, 1)$ -forma en la hoja de mundo, cuya integral es independiente de la métrica. Por tanto, el tensor energía impulso es Q_B -exacto

$$T_{ab} = \{Q_B, G_{ab}\} \quad (3.18)$$

Si definimos los operadores físicos como aquellos pertenecientes al grupo de cohomología de Q_B , e independientes de la métrica de la hoja de mundo, entonces las funciones de correlación de los operadores físicos (los observables) son independientes de la métrica de la hoja de mundo. Por tanto, la teoría es topológica². Más aun, si redefinimos $t\theta_{\mu}$ como θ_{μ} , podemos ver que la única dependencia de la acción en t está en un término Q_B -exacto, con lo que los observables físicos no dependen de t y el límite clásico $t \rightarrow \infty$ es exacto. Las soluciones a las ecuaciones de movimiento clásicas para ϕ^{μ} , $\bar{\phi}^{\bar{\mu}}$ son simplemente funciones constantes, de tal forma que las integrales de camino de esta teoría se reducen a integrales sobre el espacio blanco M . Además, la variación de la acción con respecto a la clase de Kähler del espacio blanco es Q_B -exacta, con lo que la teoría tampoco depende de los moduli de Kähler del espacio blanco. En cambio, de la acción de Q_B sobre los campos

$$\begin{aligned} \{Q_B, \phi^{\mu}\} &= 0 \\ \{Q_B, \bar{\phi}^{\bar{\mu}}\} &= -\eta^{\bar{\mu}} \\ \{Q_B, \theta_{\mu}\} &= 0 \\ \{Q_B, \eta^{\bar{\mu}}\} &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

¹Nótese que siguen siendo cantidades de Grassmann.

²A este tipo de teorías de campos topológicas basadas en una simetría con las propiedades de Q_B se les denomina teorías cohomológicas.

se observa que la teoría depende fuertemente de la estructura compleja concreta que tenga el espacio blanco. De estas ecuaciones también podemos ver que los operadores físicos locales se pueden escribir de forma general como

$$\mathcal{O}_B = B_{\bar{\mu}_1 \dots \bar{\mu}_p}^{\bar{\nu}_1 \dots \bar{\nu}_q}(\phi, \bar{\phi}) \eta^{\bar{\mu}_1} \dots \eta^{\bar{\mu}_p} \theta_{\nu_1} \dots \theta_{\nu_q} \quad (3.20)$$

Si consideramos B como una $(0, p)$ -forma que toma valores en $\wedge^q T^{(1,0)} M$, de las ecuaciones (3.19) se tiene

$$\{Q_B, \mathcal{O}_B\} = -\mathcal{O}_{\bar{\partial}B} \quad (3.21)$$

Dado que los observables físicos no son sólo Q_B -cerrados, sino que son representantes de las clases de Q_B -cohomología no triviales, tenemos, por tanto, una identificación entre los operadores físicos locales \mathcal{O}_B de la teoría y las clases de cohomología de la variedad Kähler M .

Para definir la teoría de cuerdas es necesario acoplar esta teoría de campos cohomológica a gravedad bidimensional. Esto se hace en teoría de cuerdas incluyendo, en las amplitudes para cada topología de Σ_g , por un lado, una integración sobre métricas conformemente equivalentes y, por otro, una integración sobre los moduli de estructura compleja de Σ_g . Puede verse que en este caso la carga central twistada de la teoría es cero, por lo que la primera integración no conlleva ningún problema por la anomalía conforme. En cuanto a la segunda integración, es necesario introducir una medida bien definida globalmente, tanto en el espacio de moduli \mathcal{M}_g de Σ_g como en Σ_g . El hecho de que el álgebra $\mathcal{N} = 2$ superconforme twistada sea isomorfa a un subálgebra del álgebra de simetría de la cuerda bosónica, donde Q_B juega el papel del operador BRST de la cuerda bosónica, lleva a considerar, para $g > 1$, la medida

$$\int_{\mathcal{M}_g} \prod_{\alpha=1}^{3g-3} dm^\alpha d\bar{m}^{\bar{\alpha}} \int_{\Sigma_g} G_{ww}(\mu_\alpha)_w^w \int_{\Sigma_g} G_{\bar{w}\bar{w}}(\bar{\mu}_{\bar{\alpha}})_{\bar{w}}^{\bar{w}} \quad (3.22)$$

donde m^α , $\alpha = 1, \dots, 3g - 3$, son los moduli de Σ_g y $(\mu_\alpha)_w^w$ son los diferenciales de Beltrami, que dan una base de vectores tangentes en \mathcal{M}_g . Nótese que esta medida implica una serie de inserciones fermiónicas en la integrales de camino que calculan los correladores que depende de la dimensión total de \mathcal{M}_g . Para $g > 1$ puede verse que estas inserciones fermiónicas son precisamente las necesarias para cancelar los modos cero de los operadores D_\pm sea cual sea el mapa $\phi: \Sigma_g \rightarrow M$ sólo si M tiene 3 dimensiones complejas y primera clase de Chern nula. Por tanto, las funciones de correlación de la teoría en las que no hay insertado ningún otro operador más³ son no triviales para $g > 1$ y las denotamos como F_g .

³Estamos hablando, por consiguiente, de la función de partición desde el punto de vista de la teoría de campos en Σ_g . No obstante, desde el punto de vista de la teoría de cuerdas en M estos correladores son las energías libres. A las cantidades F_g se las denomina energías libres de la cuerda topológica a género g en M .

Los casos $g = 0$ y $g = 1$ son especiales. El espacio de moduli de $\Sigma_{g=0}$ es cero-dimensional, con lo que no hay que introducir ninguna medida de integración. Esto implica que, para cancelar los modos cero fermiónicos, y obtener así un correlador no nulo, tenemos que introducir el operador $\mathcal{O}_i \mathcal{O}_j \mathcal{O}_k$, siendo

$$\mathcal{O}_i = B_{\bar{\mu}}^{\nu(i)}(\phi, \bar{\phi}) \eta^{\bar{\mu}} \theta_{\nu} \quad (3.23)$$

Denotamos estos correladores por $C_{ijk}^{(g=0)}$. Nótese que los operadores \mathcal{O}_i corresponden, si multiplicamos $B^{(i)}$ por la 3-forma holomorfa Ω de M , a elementos de $H^{2,1}(M)$. Es por ellos que los índices i, j, k van desde 1 hasta $h_{2,1}$. En el caso de $g = 1$, el espacio de moduli es de una dimensión compleja y hay, por tanto, que integrar en el parámetro modular del toro. Esto implica una inserción de $G\bar{G}$ con lo que hay que introducir el operador \mathcal{O}_i . Denotamos el correlador resultante por $C_i^{(g=1)}$.

Por otro lado, como la teoría twistada es cohomológica, a los operadores locales \mathcal{O}_i podemos asociarles operadores no locales

$$\int_{\Sigma_g} \mathcal{O}_i^{(2)} = - \int_{\Sigma_g} \{G_b, [G_a, \mathcal{O}_i]\} dx^a \wedge dx^b \quad (3.24)$$

donde $G_{\pm} = \pm \frac{1}{2} Q_{\pm}$ son las cargas asociadas a las corrientes $G_{\pm\pm}$. Puede verse que estos operadores pueden usarse para deformar la teoría

$$\delta S = t^i \int_{\Sigma_g} \mathcal{O}_i^{(2)} + \bar{t}^{\bar{i}} \int_{\Sigma_g} \bar{\mathcal{O}}_{\bar{i}}^{(2)} \quad (3.25)$$

Estas deformaciones corresponden a variaciones de la estructura compleja del espacio blanco M de manera que lo que tenemos es una familia completa de teorías en las que las amplitudes F_g dependen del punto concreto en el espacio de moduli \mathcal{M} de estructuras complejas de M . No obstante, estas cantidades no son funciones en \mathcal{M} , sino secciones del recubrimiento \mathcal{L}^{2-2g} sobre \mathcal{M} . Sus derivadas convariantes se escriben

$$D_i F_g = [\partial_i - (2g - 2)K] F_g \quad (3.26)$$

En general podemos considerar correladores con un número arbitrario de inserciones de los operadores $\int_{\Sigma_g} \mathcal{O}_i^{(2)}$. Denotamos estos correladores por $C_{i_1 \dots i_n}^{(g)}$. Éstos son secciones del recubrimiento $\text{Sim}^n(T_{(1,0)}^* \mathcal{M}) \otimes \mathcal{L}^{2-2g}$. Así, por ejemplo, la derivada covariante para $C_j^{(g)}$ se escribe

$$D_i C_i^{(g)} = [\partial_j - (2g - 2)K] C_j^{(g)} - \Gamma_{ij}^k C_k^{(g)} \quad (3.27)$$

Podemos hablar de correladores $C_{i_1 \dots i_n}^{(g)}$ para todo $g \geq 0$ y para todo $n \geq 0$ si definimos

$$C^{(0)} = C_i^{(0)} = C_{ij}^{(0)} = C^{(1)} = 0 \quad (3.28)$$

$$C^{(g)} \equiv F_g \quad \text{para } g > 1 \quad (3.29)$$

Una forma de generar inserciones de los operadores $\int_{\Sigma_g} \mathcal{O}_i^{(2)}$ en los correladores es derivar con respecto a t^i . Por ello las secciones $F_g(t, \bar{t})$ pueden considerarse como funciones generatrices de los correladores $C_{i_1 \dots i_n}^{(g)}(t, \bar{t})$. En concreto se tiene

$$C_{i_1 \dots i_n}^{(g)} = \begin{cases} D_{i_1} \dots D_{i_n} F_g & \text{para } g > 1 \\ D_{i_1} \dots D_{i_{n-3}} C_{i_{n-2} i_{n-1} i_n}^{(0)} & \text{para } g = 0 \\ D_{i_1} \dots D_{i_n} F_1 & \text{para } g = 1 \\ D_{i_1} D_{i_2} D_{i_3} F_0 & \text{para } g = 0, n = 3 \end{cases} \quad (3.30)$$

donde a los potenciales F_0 y F_1 , que son secciones de \mathcal{L}^2 y \mathcal{L}^0 , se les denomina energías libres a género cero y uno respectivamente. La función de tres puntos $C_{ijk} = C_{ijk}^{(g=0)}$ está relacionada con la curvatura de \mathcal{M} mediante la fórmula de geometría especial

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} = G_{i\bar{j}} G_{k\bar{l}} + G_{i\bar{l}} G_{k\bar{j}} - e^{2K} C_{ikm} \bar{C}_{\bar{j}l\bar{n}} G^{m\bar{n}}. \quad (3.31)$$

de forma que la energía libre a género cero coincide con el prepotencial de M .

3.2. Anomalía holomorfa

En la sección anterior se ha indicado que las funciones de correlación de la cuerda topológica pueden deformarse añadiendo a la acción el término

$$\delta S = t^i \int_{\Sigma_g} \mathcal{O}_i^{(2)} + \bar{t}^{\bar{i}} \int_{\Sigma_g} \bar{\mathcal{O}}_{\bar{i}}^{(2)} \quad (3.32)$$

Es un requerimiento de la teoría supersimétrica $\mathcal{N} = 2$, antes del twisteo, que las cantidades $\bar{t}^{\bar{i}}$ sean los complejos conjugados de t^i . Pero dado que estamos considerando la teoría twistada, es más general considerar perturbaciones en las que t no tenga necesariamente que ser el complejo conjugado de \bar{t} . Para evitar confusión, el convenio que utilizamos aquí es seguir manteniendo t como el complejo conjugado de \bar{t} y escribimos

$$\delta S = (t^i + x^i) \int_{\Sigma_g} \mathcal{O}_i^{(2)} + \bar{t}^{\bar{i}} \int_{\Sigma_g} \bar{\mathcal{O}}_{\bar{i}}^{(2)} \quad (3.33)$$

A primera vista parece que no estamos consiguiendo ninguna deformación nueva. Esto se debe a que, aparentemente, los observables de la teoría no dependen de \bar{t} , con lo que la única dependencia sería en $t + x$, que podríamos finalmente renombrar como t . En efecto, el operador $\int_{\Sigma_g} \bar{\mathcal{O}}_{\bar{i}}^{(2)}$ es Q_B -exacto

$$(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{i}}^{(2)})_{+-} = \frac{1}{8} \{Q_B, [\bar{Q}_- - \bar{Q}_+, \bar{\mathcal{O}}_{\bar{i}}]\} \quad (3.34)$$

con lo que toda derivada respecto de $\bar{t}^{\bar{i}}$ de los observables de la teoría deformada mediante (3.33) es un correlador que da cero como resultado.

Pero este argumento, aunque correcto para la teoría cohomológica, no lo es para la teoría de cuerdas topológicas. En este caso la integración en lo moduli de Σ_g implica la inserción en los correladores de los operadores

$$G \cdot \mu_\alpha \equiv \int d^2w G_{ww}(\mu_\alpha)_w^w \quad (3.35)$$

Éstos no anticonmutan con Q_B . De hecho, su anticonmutador es precisamente la derivada de la acción con respecto de m_α

$$\{Q_B, G \cdot \mu_\alpha\} = T \cdot \mu_\alpha = \frac{\partial S}{\partial m_\alpha} \quad (3.36)$$

Esto implica que

$$\frac{\partial F_g}{\partial \bar{t}^i} = \int_{\mathcal{M}_g} \prod_{\alpha=1}^{3g-3} dm^\alpha d\bar{m}^{\bar{\alpha}} \sum_{\beta, \gamma} \frac{\partial^2}{\partial m^\beta \partial m^\gamma} \left\langle \left(\prod_{\delta \neq \beta} \int_{\Sigma_g} G \cdot \mu_\delta \right) \left(\prod_{\delta \neq \gamma} \int_{\Sigma_g} G \cdot \bar{\mu}_\delta \right) \int_{\Sigma_g} \bar{\mathcal{O}}_i^{(2)} \right\rangle \quad (3.37)$$

Se trata de una integración sobre \mathcal{M}_g de una derivada total, y esta integración no es cero debido a las contribuciones de las fronteras de \mathcal{M}_g . Estas fronteras corresponden a los puntos donde algún ciclo de Σ_g degenera. Esta degeneración puede ocurrir de dos formas distintas. Puede ocurrir que el ciclo de Σ_g , al degenerar, dé como resultado una única superficie de género $g-1$. Pero también puede pasar que Σ_g se descomponga en dos superficies de género r y $g-r$. Estas dos contribuciones dan lugar respectivamente a los dos términos de la siguiente fórmula [14]

$$\frac{\partial F_g(t, \bar{t})}{\partial \bar{t}^i} = \frac{1}{2} \bar{C}_{i\bar{j}\bar{k}} e^{2K} G^{\bar{j}j} G^{\bar{k}k} \left(D_j D_k F_{g-1} + \sum_{r=1}^{g-1} D_j F_r D_k F_{g-r} \right) \quad (3.38)$$

para $g > 1$. La anomalía holomorfa para F_1 es

$$\frac{\partial}{\partial t^i} \frac{\partial}{\partial \bar{t}^j} F_1 = \frac{1}{2} e^{2K} C_{ikl} \bar{C}_{\bar{j}\bar{k}\bar{l}} G^{k\bar{k}} G^{\bar{l}l} - \left(\frac{\chi}{24} - 1 \right) G_{i\bar{j}} \quad (3.39)$$

En cambio, al no tener inserciones de tipo $G \cdot \mu$, F_0 sí que es holomorfa.

Siguiendo a Witten [12], interpretamos aquí esta dependencia en \bar{t} como una dependencia en el background. La idea es que \bar{t} determina la teoría física original (3.32) que ha sido posteriormente twistada y deformada (3.33) por los operadores $\int_{\Sigma_g} \mathcal{O}_i^{(2)}$ con coeficientes x^i . Desde este punto de vista, la dependencia en \bar{t} significa que la cuerda topología “se acuerda” de la teoría física particular de la que se partió. Ésta define el punto de base del espacio de las teorías. Por este motivo tratamos a las cantidades (t^i, \bar{t}^i) , donde insistimos en que t^i es la compleja conjugada de \bar{t}^i , como coordenadas que parametrizan el espacio de moduli \mathcal{M} de estructuras complejas en M , mientras que x^i son las coordenadas de un vector tangente holomorfo

$$x^i \frac{\partial}{\partial t^i} \in T_{(t, \bar{t})}^{(1,0)} \mathcal{M} \quad (3.40)$$

en el punto (t, \bar{t}) .

Podemos agrupar todas las amplitudes $C_{i_1 \dots i_n}^{(g)}$ a todo género g en una función generatriz

$$W(\lambda, x^i; t^i, \bar{t}^i) := \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \lambda^{2g-2} C_{i_1 \dots i_n}^{(g)}(t, \bar{t}) x^{i_1} \dots x^{i_n} + \left(\frac{\chi}{24} - 1 \right) \log \lambda. \quad (3.41)$$

donde χ es el número de Euler de M . Se trata de una serie definida formalmente que no tiene por qué converger. El parámetro λ introducido aquí juega el papel de acoplo para la cuerda topológica y es una sección de \mathcal{L} . Las amplitudes a distintos géneros se obtienen simplemente derivando $\lambda^2 W$ con respecto a λ $2g$ veces y mandando posteriormente λ a cero. La función de partición de cuerdas topológicas se define como

$$Z_{\text{top}}(\lambda, x^i; t^i, \bar{t}^i) = \exp \left[W(\lambda, x^i; t^i, \bar{t}^i) \right] \quad (3.42)$$

y, debido al segundo término de la definición (3.41), es una sección de $\mathcal{L}^{\frac{\chi}{24}-1}$. Uno podría pensar que, debido a la deformación (3.33), Z_{top} es función de $(t^i + x^i, \bar{t}^i)$, de tal forma que $\frac{\partial}{\partial t^i} Z_{\text{top}} = \frac{\partial}{\partial x^i} Z_{\text{top}}$. Pero esto no es así. Las reglas de selección (3.28) implican que la ligadura entre la dependencia en t^i y x^i es

$$\left[\frac{\partial}{\partial t^i} - \Gamma_{ij}^k x^j \frac{\partial}{\partial x^k} + \partial_i K \left(\frac{\chi}{24} - 1 - \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} + \partial_i F_1 + \frac{1}{2\lambda^2} C_{ijk} x^j x^k \right] Z_{\text{top}} = 0 \quad (3.43)$$

Por otro lado, las ecuaciones de la anomalía holomorfa para Z_{top} se escriben

$$\left[\frac{\partial}{\partial \bar{t}^i} - \frac{\lambda^2}{2} e^{2K} \bar{C}_{ij\bar{k}} G^{j\bar{j}} G^{k\bar{k}} \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k} + G_{ij} x^j \left(\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + x^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \right] Z_{\text{top}} = 0 \quad (3.44)$$

3.3. Entropía de los agujeros negros como una carga de Noether

La derivación tradicional de las leyes termodinámicas de los agujeros negros en Relatividad General se basa en la utilización de muchas propiedades detalladas de las ecuaciones de Einstein, esto es, de la forma concreta de la acción. Sin embargo, si queremos calcular las correcciones (3.1) a la entropía de los agujeros negros, necesitamos un procedimiento que sea independiente de la forma concreta de la acción. Una posibilidad es usar el método de la integral de camino euclídea [66, 67]. En la ref. [71], Wald muestra que se sigue cumpliendo la primera ley de la mecánica de agujeros negros para todo agujero negro estacionario con horizonte de Killing bifurcado en toda teoría general del campo gravitatorio que sea derivable de una lagrangiana. El término que juega el papel de entropía en esta ley es la carga de Noether de la superficie de bifurcación S_0 asociada al campo vectorial de Killing, que se anula en S_0 . También demuestra que esta

entropía coincide con la que se obtiene utilizando el método de la integral de camino euclídea.

Para describir brevemente esta derivación [71, 72] vamos a considerar una teoría general en una variedad espacio-temporal X de n dimensiones. Vamos a denotar por ϕ el conjunto de todos los campos dinámicos, incluyendo la métrica. El caso concreto que nos interesa, la teoría efectiva de supergravedad $\mathcal{N} = 2$ de la sección 2.2 con todas las correcciones que queramos, está claramente incluido en esta suposición general, con $n = 4$. Escribimos la lagrangiana \mathcal{L} como una n -forma, función de ϕ y de sus derivadas. La invariancia bajo difeomorfismos de la teoría implica entonces

$$\psi : X \rightarrow X \implies \mathcal{L}[\psi^*(\phi)] = \psi^*(\mathcal{L}[\phi]) \quad (3.45)$$

Si consideramos que el difeomorfismo ψ está generado por el campo vectorial ξ el lado derecho de la ec. (3.45) se escribe como una derivada de Lie

$$\delta_\xi \mathcal{L} = d(\xi \cdot \mathcal{L}) \quad (3.46)$$

Pero, por otro lado, el lado izquierdo se escribe, denotando la variación de ϕ por $\delta_\xi \phi$, como

$$\delta_\xi \mathcal{L} = E \delta_\xi \phi + d\Theta[\delta_\xi \phi] \quad (3.47)$$

Aquí E es una n -forma, función de ϕ y de sus derivadas, que da lugar a las ecuaciones de movimiento clásicas ($E = 0$), y $\Theta[\delta_\xi \phi]$ es una $(n - 1)$ -forma, función también de ϕ y de sus derivadas, que depende linealmente de $\delta_\xi \phi$ y de sus derivadas. $\Theta[\delta_\xi \phi]$ se denomina la $(n - 1)$ -forma de corriente simpléctica. Por tanto, si definimos

$$j = \Theta(\phi, \delta_\xi \phi) - \xi \cdot \mathcal{L} \quad (3.48)$$

la ecuación (3.45) implica que

$$dj = -E \delta_\xi \phi \quad (3.49)$$

La $(n - 1)$ -forma j es, por consiguiente, la corriente de Noether asociada a la simetría local ψ_ξ (es una forma cerrada si la evaluamos en una configuración de campo que satisface las ecuaciones de movimiento). Existe, al menos localmente, una $(n - 2)$ -forma Q , que es la correspondiente forma de carga de Noether, tal que

$$j = dQ \quad (3.50)$$

que es única salvo adición de una $(n - 2)$ -forma exacta y cerrada. En una configuración de campo que satisfaga las ecuaciones de movimiento se tiene que

$$0 = \int_{V \subset X} dj = \int_{\Sigma_2} j - \int_{\Sigma_1} j \implies \int_{\Sigma_1} j = \int_{\Sigma_2} j \quad (3.51)$$

Esta última integral es, además, independiente de la familia de superficies de Cauchy que se tomen para foliar X . Además

$$\int_\Sigma j = \int_{\partial\Sigma} Q \quad (3.52)$$

es la carga de Noether de $\partial\Sigma$ relativa a ξ .

Si hacemos ahora una pequeña variación $\delta\phi$ sobre la solución ϕ , se tiene

$$\delta j = \delta\Theta[\delta_\xi\phi] - \xi \cdot \delta\mathcal{L} = \delta\Theta[\delta_\xi\phi] - \xi \cdot d\Theta[\delta\phi] = \omega[\delta\phi, \delta_\xi\phi] + d(\xi \cdot \Theta[\delta\phi]) \quad (3.53)$$

donde

$$\omega[\delta\phi, \delta_\xi\phi] := \delta\Theta[\delta_\xi\phi] - \delta_\xi\Theta[\delta\phi] \quad (3.54)$$

es la $(n-1)$ -forma corriente simpléctica asociada a \mathcal{L} . Se puede ver que $\omega[\delta\phi, \delta_\xi\phi]$ depende linealmente de $\delta\phi$, $\delta_\xi\phi$ y de sus derivadas y que es antisimétrica bajo el intercambio $\delta\phi \longleftrightarrow \delta_\xi\phi$ [73]. Si suponemos ahora que ξ es un vector de Killing de la solución, entonces $\delta_\xi\phi = 0$, con lo que se obtiene

$$\delta j = d(\xi \cdot \Theta[\delta\phi]) \quad (3.55)$$

Consideramos, además, que δ es una variación de los campos que satisface las ecuaciones de movimiento linealizadas de la teoría. Entonces podemos escribir, por lo menos localmente, $\delta j = d\delta Q$. Si suponemos también que la solución estamos considerando es un agujero negro estacionario con horizonte bifurcado S_0 (superficie $(n-2)$ -dimensional) donde el vector de Killing ξ se anula, y que Σ es una superficie de Cauchy que va desde el infinito hasta el horizonte, entonces

$$\int_\Sigma \delta j = \delta \int_{S_\infty} Q - \delta \int_{S_0} Q \quad (3.56)$$

$$\int_\Sigma d(\xi \cdot \Theta[\delta\phi]) = \int_{S_\infty} \xi \cdot \Theta[\delta\phi] \quad (3.57)$$

Vamos a considerar, por simplicidad, que el agujero negro no tiene cargas, ni eléctricas ni magnéticas, y que es estático. Esto implica que $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$. Finalmente, utilizamos que la masa ADM del agujero negro viene dada por

$$E = \int_{S_\infty} Q_{\frac{\partial}{\partial t}} - \int_{S_\infty} \frac{\partial}{\partial t} \cdot B \quad (3.58)$$

donde $\frac{\partial}{\partial t} \cdot B$ es una $(n-2)$ -forma cuya variación es $\frac{\partial}{\partial t} \cdot \Theta[\delta\phi]$. Se llega entonces a

$$\delta E = \delta \int_{S_0} Q_{\frac{\partial}{\partial t}} \quad (3.59)$$

Esta es la primera ley de la mecánica de agujeros negros. La cantidad que juega al papel de entropía es

$$S_{\text{BHW}} = 2\pi \int_{S_0} \tilde{Q}_{\frac{\partial}{\partial t}} \quad (3.60)$$

donde $\tilde{Q}_{\frac{\partial}{\partial t}} = Q_{\frac{\partial}{\partial t}}/\kappa$ es la $(n-2)$ -forma de carga de Noether reescalada asociada a $\frac{\partial}{\partial t}$ y κ es la gravedad de superficie del agujero negro, cuya relación con la temperatura es

$\kappa = 2\pi T$. Fuera de la superficie de bifurcación el potencial de Noether reescalado es más complicado porque ξ no se anula. No obstante, se puede ver [74] que los términos en \tilde{Q} que se anulan en S_0 no contribuyen a la entropía cuando evaluamos la integral en la sección espacial S_h del horizonte de sucesos. Por tanto, se puede usar S_h para calcular S_{BHW} . Situándonos en el caso 4-dimensinal y escribiendo las 2-formas como densidades tensoriales podemos escribir

$$S_{\text{BHW}} = 2\pi \int_{S_h} d\sigma_{mn} \tilde{Q}_{\frac{\partial}{\partial t}}^{mn} \quad (3.61)$$

Esta derivación también puede generalizarse para el caso que nos interesa en el que el agujero negro está cargado, obteniéndose el mismo resultado (3.61). También se muestra en la ref. [74] que si la lagrangiana no depende de las derivadas del tensor de Riemann, entonces $\tilde{Q}_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\mu\nu}$ puede calcularse fácilmente mediante la expresión

$$\tilde{Q}_{\frac{\partial}{\partial t}}^{mn} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{mnsr}} \epsilon^{sr} \quad (3.62)$$

Naturalmente esta derivación de la entropía del agujero negro como una carga de Noether sólo puede hacerse para agujeros negros no-extremales, que son los que tienen horizonte bifurcado. No obstante, este método también se puede usar para agujeros negros extremales si consideramos estos últimos como el límite de cero temperatura del caso general no-extremal. Por tanto, podemos seguir usando la ec. (3.61) para el caso que nos interesa de agujeros negros extremales.

3.4. Entropía de Bekenstein-Hawking-Wald para agujeros negros CY supersimétricos

Una vez tenemos la fórmula de la entropía de Bekenstein-Hawking-Wald (3.61) lo que necesitamos para aplicarla es la forma de la acción corregida y las correcciones que ésta da a la correspondiente solución de tipo agujero negro. En general, no es fácil calcular en teoría de cuerdas las correcciones adicionales a la teoría efectiva de baja energía. Afortunadamente, en el caso concreto que nos interesa de supergravedad $\mathcal{N} = 2$ $d = 4$ acoplada a multipletes vectoriales este problema se simplifica para un tipo concreto de correcciones. Es conveniente estudiar estas correcciones en una descripción de superespacio “off-shell” que tiene la teoría (véase [76]), en la que los elementos básicos son el supercampo quiral de Weyl W , cuya componente más baja es el tensor campo electromagnético T asociado al gravifotón, y los $h_{2,1} + 1$ supercampos quirales de materia \tilde{X}^I , cuyas componentes más bajas son los campos X^I . Dada una función $F(\tilde{X}, \Gamma)$ holomorfa y homogénea de grado 2, con $\Gamma = W^2$, regular en $\Gamma = 0$

$$F(\tilde{X}, \Gamma) = \sum_{g=0}^{\infty} \Gamma^g F_g(\tilde{X}) \quad (3.63)$$

denominada prepotencial generalizado, se puede construir la integral

$$\int d^4\theta d^4x F(\tilde{X}, \Gamma) = S_o + \int \sum_{g=1}^{\infty} F_g(X) (gR^2 T^{2g-2} + 2g(g-1)(RT)^2 T^{2g-4}) + \dots \quad (3.64)$$

de tal manera que se reproduce la lagrangiana (2.21) sin corregir, más toda una serie de correcciones de tipo “términos F” de orden más alto en la curvatura. Para obtener los coeficientes $F_g(X)$ habría que calcular la amplitud de scattering de $2g-2$ gravitones y $2g-2$ gravifotones en la teoría de cuerdas tipo IIB compactificada en M . En este contexto los términos F_g surgen como efectos de orden $2g-2$ en g_s , pero son términos a nivel árbol en α' . En las refs. [14, 75] se muestra que este problema se reduce a un cálculo en la teoría de cuerdas topológicas modelo B en M , de tal forma que los coeficientes F_g son precisamente las energías libres a género g de la cuerda topológica. La idea es que la inserción de $2g-2$ operadores vértice de gravifotón induce una carga de fondo que da lugar al twist topológico (3.10). La propiedad de homogeneidad de $F(X, \Gamma)$

$$F(a\tilde{X}, a^2\Gamma) = a^2 F(\tilde{X}, \Gamma) \quad (3.65)$$

se traduce en

$$2F = \tilde{X} \frac{\partial F}{\partial \tilde{X}} + 2\Gamma \frac{\partial F}{\partial \Gamma} \quad (3.66)$$

Puede verse⁴ que en esta teoría corregida también se da el fenómeno del atractor para los agujeros negros CY supersimétricos, pero ahora hay que sustituir las ecuaciones del atractor (2.96) por

$$p^I = \text{Re}(CX^I) \quad (3.67)$$

$$q_I = \text{Re}\left(\frac{\partial F(CX, \Gamma)}{\partial(CX^I)}\right) \quad (3.68)$$

$$\Gamma = 256 \quad (3.69)$$

El módulo al cuadrado del campo “carga central” en el horizonte es ahora

$$|Z_{pq}|^2 = \frac{1}{2i} \left[q_I CX^I - p^I \frac{\partial F(CX, \Gamma)}{\partial(CX^I)} \right] \quad (3.70)$$

donde CX^I están evaluados ahora en el nuevo punto del atractor (corregido). Esto implica que el área del horizonte $A = 4\pi|Z_{pq}|^2$ tiene ahora correcciones que sólo son importantes si las cargas (p^I, q_I) del agujero negro no son demasiado grandes. Además de estas correcciones al área, la entropía ya no viene dada por $A/4$, sino por la fórmula de Wald (3.61), que en este caso da

$$S_{\text{BHW}}(p, q) = \pi \left[|Z_{pq}|^2 + 4\Gamma \text{Im} \frac{\partial F}{\partial \Gamma} \right] = +i\frac{\pi}{2} F(CX, \Gamma) - i\frac{\pi}{2} \bar{F}(\bar{C}\bar{X}, \Gamma) + \frac{\pi}{2} q_I \phi^I \quad (3.71)$$

⁴Véase las refs. [76, 77] y las citas que contiene.

donde $\phi^I = 2\text{Im}(CX^I)$.

No obstante, para ser más preciso, la expresión (3.64) no es la acción efectiva “física” (1PI) de la teoría, sino la acción efectiva Wilsoniana. En cambio, lo que calculan las cantidades no holomorfas $F_g^{\text{top}}(X, \bar{X})$ son los acoplos físicos $R^2 T^{2g-2}$, que son distintos de los acoplos holomorfos Wilsonianos $F_g(X)$ que aparecen en la ec. (3.64) debido a las contribuciones de las partículas sin masa. Pero es con la acción de 1PI con la que hay que trabajar para estudiar las soluciones de tipo agujero negro, el mecanismo del atractor y la entropía. Por tanto, la fórmula (3.71) sólo es válida en el límite en el que podemos despreciar las contribuciones no holomorfas a F_g^{top} . Para obtener una expresión general hay que hacer el cambio [77]

$$F(X, \Gamma) \rightarrow F_{\text{mod}}(X, \bar{X}, \Gamma, \bar{\Gamma}) \quad (3.72)$$

en la acción efectiva, donde

$$F_{\text{mod}}(X, \bar{X}, \Gamma, \bar{\Gamma}) = F(X, \Gamma) - i\Omega(X, \bar{X}, \Gamma, \bar{\Gamma}) \quad (3.73)$$

con $\Omega(X, \bar{X}, \Gamma, \bar{\Gamma})$ una función real homogénea

$$\Omega(aX, b\bar{X}, a^2\Gamma, b^2\bar{\Gamma}) = a^2\Omega(X, \bar{X}, \Gamma, \bar{\Gamma}) \quad (3.74)$$

que contiene las correcciones no holomorfas al prepotencial generalizado. De la ec. (3.74) se tiene

$$2\Omega = X \frac{\partial \Omega}{\partial X} + 2\Gamma \frac{\partial \Omega}{\partial \Gamma} \quad (3.75)$$

$$0 = X \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{X}} + 2\bar{\Gamma} \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\Gamma}} \quad (3.76)$$

Con los convenios utilizados en este trabajo la relación entre F_{mod} y las energías libres de la cuerda topológica es

$$\begin{aligned} F_{\text{mod}}(CX, \bar{C}\bar{X}, \Gamma = 256, \bar{\Gamma} = 256) &= -\frac{2}{\pi}i \sum_g \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right)^{2g-2} F_{\text{top}}^g(C\Omega, \bar{C}\bar{\Omega}) = \\ &= -\frac{2}{\pi}i \sum_g \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}C} \right)^{2g-2} F_{\text{top}}^g(\Omega, \bar{\Omega}) \end{aligned} \quad (3.77)$$

Con el cambio (3.72) se llega a las ecuaciones del atractor corregidas

$$\begin{aligned} p^I &= \text{Re}(CX^I) \\ q_I &= \text{Re} \left(\frac{\partial F_{\text{mod}}(CX, \bar{C}\bar{X}, \Gamma, \bar{\Gamma})}{\partial(CX^I)} - \frac{\partial F_{\text{mod}}(CX, \bar{C}\bar{X}, \Gamma, \bar{\Gamma})}{\partial(\bar{C}\bar{X}^I)} \right) \\ \Gamma &= 256 \end{aligned} \quad (3.78)$$

y la entropía de Bekenstein-Hawking-Wald es

$$S_{\text{BHW}}(p, q) = +i\frac{\pi}{2}F_{\text{mod}}(CX, \bar{C}\bar{X}, \Gamma, \bar{\Gamma}) - i\frac{\pi}{2}\bar{F}_{\text{mod}}(\bar{C}\bar{X}, CX, \bar{\Gamma}, \Gamma) + \frac{\pi}{2}q_I\phi^I \quad (3.79)$$

con CX^I y Γ evaluados en el punto del atractor corregido.

3.5. Generalizaciones de BHW

Como se observa en la ref. [77], la entropía (3.79) puede escribirse como una transformada de Legendre de la función generalizada de Hesse

$$\mathcal{H}_{\text{mod}}(\phi, \chi) = -\text{Im}F_{\text{mod}}(CX, \bar{C}\bar{X}, \Gamma = 256, \bar{\Gamma} = 256) - \frac{\chi}{2}p_X \quad (3.80)$$

donde

$$\phi^I = 2\text{Im}(CX^I) \quad (3.81)$$

$$\chi_I = -2\text{Im}\left(\frac{\partial F_{\text{mod}}(CX, \bar{C}\bar{X}, \Gamma, \bar{\Gamma})}{\partial(CX^I)} - \frac{\partial F_{\text{mod}}(CX, \bar{C}\bar{X}, \Gamma, \bar{\Gamma})}{\partial(\bar{C}\bar{X}^I)}\right) \quad (3.82)$$

y $p_X^I = \text{Re}(CX^I)$, como función de (ϕ, χ) , viene dado por la solución de la ec. (3.82). En concreto,

$$S_{\text{BHW}}(p, q) = \pi\Sigma(\phi, \chi, p, q)|_{\phi_{pq}, \chi_{pq}} = \pi\left[\mathcal{H}_{\text{mod}}(\phi, \chi) + \frac{\chi}{2}p + \frac{\phi}{2}q\right]\Big|_{\phi_{p,q}, \chi_{p,q}} \quad (3.83)$$

donde ϕ_{pq}, χ_{pq} son las soluciones de

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial\phi} = 0 \quad (3.84)$$

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial\chi} = 0 \quad (3.85)$$

Como las cantidades ϕ^I y χ_J juegan el papel de potenciales termodinámicos asociados, respectivamente, a q_I y p^J , esta transformada de Legendre se puede interpretar como la típica relación, en el límite termodinámico, entre las energías libres asociadas a los colectivos microcanónico y canónico, donde ϕ^I y χ_J son las variables del colectivo canónico, y el límite termodinámico es el límite de cargas grandes. Esta analogía formal conduce la conjetura [77] de que la función de partición exacta del agujero negro en el colectivo canónico es igual a

$$Z_{\text{BH}}(\chi, \phi) = \exp[\pi\mathcal{H}_{\text{mod}}(\phi, \chi)] \quad (3.86)$$

Nótese que esta conjetura implica que la entropía de BHW es la entropía exacta microscópica que puede calcularse a partir de este colectivo canónico es decir, que las fórmulas (3.1) y (3.2) coinciden si se elige como colectivo privilegiado el colectivo canónico. Si asumimos esta conjetura, el número exacto de microestados compatibles $\Omega(p, q)$ asociados al agujero negro es

$$\Omega_{\text{CdWKM}}(p, q) := \exp S_{\text{CdWKM}}(p, q) = \int d\phi d\chi \exp[\pi\Sigma(\phi, \chi, p, q)] \quad (3.87)$$

$S_{\text{BHW}}(p, q)$ sería, por tanto, la aproximación de punto de silla de $S_{\text{CdWKM}}(p, q)$, que es una entropía positiva e invariante simpléctica.

Esta propuesta de los autores de la ref. [77] es posterior a la conjetura OSV [10], y generaliza tanto esta última como a la entropía de *BHW*. Esto es así porque, a partir de $S_{\text{CdWKM}}(p, q)$ se puede obtener la fórmula de OSV si aproximamos la integral en χ por el método del punto de silla [10]

$$\exp S_{\text{CdWKM}}(p, q) \approx \exp S_{\text{OSV}}(p, q) = \int_{C_{\mathcal{M}}} d\phi m(CX, \bar{C}\bar{X}) \left| \exp i \frac{\pi}{2} F_{\text{mod}}(CX, \bar{C}\bar{X}, 256) \right|^2 e^{\frac{\pi}{2} q \phi} \quad (3.88)$$

donde $CX = p + i \frac{\phi}{2}$ y donde $C_{\mathcal{M}}$ es un camino en \mathcal{M} que corresponde a los puntos en los que $\text{Re}(CX) = p$. Por otro lado $m(CX, \bar{C}\bar{X})$ es un factor que viene de la integración gaussiana que asegura que toda la expresión sea invariante simpléctica. Desde el punto de vista de la conjetura (3.87) la fórmula de OSV es sólo una aproximación. No obstante, si tomamos el punto de vista de que la fórmula exacta es (3.88), lo que la conjetura nos está diciendo es que la función de partición exacta del agujero negro en un colectivo mixto en el que están fijados p^I y ϕ^I

$$Z_{\text{BH}}(p, \phi) = \sum_q \Omega(p, q) e^{-\frac{\pi}{2} q \phi} \quad (3.89)$$

es igual a

$$Z_{\text{BH}}(p, \phi) = \left| \exp F_{\text{top}}(2/C\sqrt{\pi}, \Omega, \bar{\Omega}) \right|^2 \quad (3.90)$$

Por otro lado, si evaluamos la integral en ϕ de la ec. (3.88) en el punto de silla, lo que se obtiene es $S_{\text{BHW}}(p, q)$.

El punto de vista que adoptamos como más natural en el presente trabajo es el de la conjetura OSV. Esto se debe a lo siguiente. Ya hemos señalado que S_{BHW} coincide con la entropía que se obtiene con el método de la integral de camino euclídea en la que se fijan la clase topológica de los campos gauge (es decir, p^I) y el valor asintótico de los potenciales (es decir, ϕ^I). Por tanto S_{BHW} va a ser la transformada de Legendre de la energía libre correspondiente al colectivo mixto (p^I, ϕ^I) , y esto es precisamente lo que se obtiene de la ec. (3.90). Obsérvese también que la ec. (3.90) es una igualdad entre dos expansiones perturbativas: en el lado derecho se tiene una expansión en el acoplo de la cuerda topológica y en el lado izquierdo en el inverso de la carga central del agujero negro. Esta relación propuesta entre estas dos expansiones y la búsqueda de su extensión no perturbativa constituyen guías muy útiles para el desarrollo del programa propuesto de examinar la correspondencia agujeros negros/cuerdas más allá del límite termodinámico. Este es el motivo por el que la lista de trabajos en los que esta conjetura ha sido estudiada y refinada es extensísima. Sirvan como ejemplos las referencias [18, 20, 77–80, 88, 89, 92, 95, 99–110].

Capítulo 4

Cuantización de $H^3(CY_3, \mathbb{R})$

En el capítulo anterior hemos visto que la dependencia no holomorfa de las amplitudes de la cuerda topológica puede interpretarse como una dependencia en el background. Inmediatamente después de que las ecuaciones de la anomalía holomorfa fueran derivadas a partir de la formulación de la teoría en la hoja de mundo [13, 14], Witten [12], en un intento de abordar el problema de la dependencia en el background en teoría de cuerdas en esta versión simplificada, halló, para el modelo B, que la función de partición de la cuerda topológica Z_{top} puede interpretarse como una función de onda, obtenida mediante la cuantización del espacio de 3-formas de cohomología $H^3(M, \mathbb{R})$, donde M es el CY_3 donde la cuerda se “propaga”. Esta interpretación mecano-cuántica de la anomalía holomorfa ha sido reelaborada y desarrollada más recientemente en los trabajos [90–93, 96].

En este capítulo analizamos en detalle la cuantización de $H^3(M, \mathbb{R})$, los dos tipos distintos de polarizaciones en la que ésta puede hacerse fundamentalmente, la relación entre ellos, y la relación exacta que hay entre Z_{top} y cierto estado físico de la teoría. En la sección 4.1 introducimos la teoría a cuantizar como una teoría de campos en 7 dimensiones para una 3-forma real. Se trata de un sistema singular. En la sección 4.2 describimos la formulación hamiltoniana del sistema y las ligaduras a las que ésta da lugar. La cuantización del sistema en polarización de Kähler se estudia en detalle en la sección 4.3, y en polarización real en la sección 4.4. En la sección 4.5 revisamos por qué puede interpretarse la función de partición de la cuerda topológica como una función de onda en polarización de Kähler. En la sección 4.6 describimos la posibilidad de cuantizar el sistema usando polarizaciones híbridas y la relación entre estas polarizaciones y las anteriores. El uso de una de estas polarizaciones híbridas como herramienta auxiliar nos permite obtener en la sección 4.7 de forma elegante la función de onda en polarización real asociada a la cuerda topológica. En la sección 4.8 hacemos algunos comentarios acerca de la posibilidad de cuantizar el sistema usando una polarización no lineal. Por último, en la sección 4.9 profundizamos algo más en el significado del

cambio de polarización de real a Kähler y viceversa y describimos qué le ocurre a las propiedades de cada polarización en este proceso.

4.1. Descripción lagrangiana de la teoría

Tomamos como punto de partida una teoría de campos 7-dimensional en $M \times \mathbb{R}$, con acción

$$S[C] = \frac{1}{2} \int_{M \times \mathbb{R}} C \wedge d'C \quad (4.1)$$

donde C es una 3-forma real en $M \times \mathbb{R}$ y d' es la derivada exterior en 7d. Podemos ver esta teoría como una generalización a 7d de la mejor conocida teoría de Chern-Simons abeliana en 3d. La acción (4.1) es un mapa $S : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ desde el espacio \mathcal{F} de configuraciones de campo permitidas cinemáticamente a \mathbb{R} . Escribimos la lagrangiana como una 7-forma

$$\mathcal{L} = 2C \wedge d'C \quad (4.2)$$

Ante una variación de C la lagrangiana cambia de la siguiente manera

$$\delta \mathcal{L} = E \wedge \delta C + d'\Theta[\delta C] \quad (4.3)$$

donde

$$E := d'C = 0 \quad (4.4)$$

son las ecuaciones clásicas de movimiento, y

$$\Theta[\delta C] := -\frac{1}{2} C \wedge \delta C \quad (4.5)$$

es la densidad potencial de corriente simpléctica.

Para estudiar el sistema desde un punto de vista 6-dimensional hacemos la descomposición

$$C = \gamma + \omega \wedge dt' \quad (4.6)$$

donde ω y γ son, respectivamente, 2-formas y 3-formas reales en M . Tenemos

$$d'C = (-\dot{\gamma} + d\omega) \wedge dt' + d\gamma \quad (4.7)$$

La notación que utilizamos es la siguiente: d es la derivada exterior en 6 dimensiones y $\dot{\cdot}$ denota una derivada con respecto a t' . Así, podemos escribir la acción en términos de una lagrangiana que es una 6-forma en M

$$S = \int_{M \times \mathbb{R}} \mathcal{L}_{6d} \wedge dt' \quad (4.8)$$

$$\mathcal{L}_{6d} = \frac{1}{2} \gamma (-\dot{\gamma} + d\omega) + \frac{1}{2} \omega \wedge d\gamma \quad (4.9)$$

La variación de esta lagrangiana es

$$\delta \mathcal{L}_{6d} = E_\gamma \delta \gamma + E_\omega \delta \omega + \frac{d}{dt'} \Theta_{t, \delta \gamma} + d\Theta_{\delta \gamma} + d\Theta_{\delta \omega} \quad (4.10)$$

donde

$$E_\gamma := (\dot{\gamma} - d\omega) = 0 \quad (4.11)$$

$$E_\omega := d\gamma = 0 \quad (4.12)$$

son las ecuaciones clásicas de movimiento y

$$\Theta_{t, \delta \gamma} := -\frac{1}{2} \gamma \wedge \delta \gamma \quad (4.13)$$

$$\Theta_{\delta \gamma} := \frac{1}{2} \omega \wedge \delta \gamma \quad (4.14)$$

$$\Theta_{\delta \omega} := -\frac{1}{2} \gamma \delta \omega \quad (4.15)$$

La acción (4.1) tiene la simetría gauge

$$C \rightarrow C + d'B \quad (4.16)$$

donde $B = \beta + \epsilon \wedge dt'$ es una 2-forma real en $M \times \mathbb{R}$, y β, ϵ son respectivamente una 2-forma real una 1-forma real en M . En efecto, la lagrangiana cambia según

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + -\frac{1}{2} d'C \wedge d'B \quad (4.17)$$

con lo que es invariante en las condiciones en las que las ecuaciones de movimiento se satisfacen. Desde el punto de vista 6-dimensional

$$\gamma \rightarrow \gamma + d\beta \quad (4.18)$$

$$\omega \rightarrow \omega + \dot{\beta} + d\epsilon \quad (4.19)$$

4.2. Descripción hamiltoniana

Los momentos conjugados de γ y ω son

$$\pi_\gamma := \frac{\partial \mathcal{L}_{6d}}{\partial \dot{\gamma}} = -\frac{1}{2} \gamma \quad (4.20)$$

$$\pi_\omega := \frac{\partial \mathcal{L}_{6d}}{\partial \dot{\omega}} = 0 \quad (4.21)$$

El camino usual para hamiltonizar el sistema consiste en escribir la 6-forma hamiltoniana

$$\mathcal{H}_{6d} = \pi_\gamma \wedge \dot{\gamma} + \pi_\omega \wedge \dot{\omega} - \mathcal{L}_{6d} \quad (4.22)$$

donde $\dot{\gamma}$ y $\dot{\omega}$ vengan dados en términos de γ , ω , π_γ y π_ω . Pero para este sistema esto último no puede hacerse debido a que se trata de un sistema singular:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{6d}}{\partial \dot{\gamma} \partial \dot{\gamma}} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{6d}}{\partial \dot{\gamma} \partial \dot{\omega}} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{6d}}{\partial \dot{\omega} \partial \dot{\gamma}} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{6d}}{\partial \dot{\omega} \partial \dot{\omega}} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.23)$$

El procedimiento que hay que utilizar consiste en imponer unas ligaduras consistentes en que las velocidades sean iguales a unos valores dados v_γ y v_ω . Esto se hace mediante la introducción de los multiplicadores de Lagrange adecuados, que resultan ser los momentos π_γ y π_ω . Se obtiene de esta forma un principio variacional que viene de la acción

$$S = \int_{M \times \mathbb{R}} (\pi_\gamma \wedge \dot{\gamma} + \pi_\omega \wedge \dot{\omega} - \mathcal{H}_{6d}^*) \wedge dt' \quad (4.24)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{6d}^*(\gamma, \omega, \pi_\gamma, \pi_\omega, v_\gamma, v_\omega) &= \pi_\gamma \wedge v_\gamma + \pi_\omega \wedge v_\omega - \mathcal{L}_{6d}(\gamma, \omega, v_\gamma, v_\omega) = \\ &= -v_\gamma \wedge \left(\frac{1}{2} \gamma + \pi_\gamma \right) + v_\omega \wedge \pi_\omega - \frac{1}{2} \gamma \wedge d\omega - \frac{1}{2} \omega \wedge d\gamma \end{aligned} \quad (4.25)$$

Si variamos todas estas cantidades de forma independiente, $\delta\gamma$, $\delta\omega$, $\delta\pi_\gamma$, $\delta\pi_\omega$, δv_γ y δv_ω , las ecuaciones de Hamilton que obtenemos son

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{6d}^*}{\partial \gamma} = -\dot{\pi}_\gamma \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{6d}^*}{\partial \omega} = -\dot{\pi}_\omega \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{6d}^*}{\partial \pi_\gamma} = -\dot{\gamma} \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{6d}^*}{\partial \pi_\omega} = +\dot{\omega} \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{6d}^*}{\partial v_\gamma} = 0 \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{6d}^*}{\partial v_\omega} = 0 \quad (4.31)$$

Hay que considerar las dos últimas ecuaciones como ligaduras primarias en el espacio de fases del sistema. Si definimos

$$\Phi_\gamma^{(1)} := \frac{\partial \mathcal{H}_{6d}^*}{\partial v_\gamma} = \pi_\gamma + \frac{1}{2} \gamma \quad (4.32)$$

$$\Phi_\omega^{(1)} := \frac{\partial \mathcal{H}_{6d}^*}{\partial v_\omega} = \pi_\omega \quad (4.33)$$

y

$$\mathcal{H}_{6d}(\gamma, \omega, \pi_\gamma, \pi_\omega) = \mathcal{H}_{6d}^* - \Phi_\gamma^{(1)} \wedge v_\gamma - \Phi_\omega^{(1)} \wedge v_\omega = -\omega \wedge d\gamma + \frac{1}{2} d(\gamma \wedge \omega) = -\gamma \wedge d\omega - \frac{1}{2} d(\gamma \wedge \omega) \quad (4.34)$$

concluimos que lo que tenemos es un sistema con un hamiltoniano \mathcal{H}_{6d} y con las ligaduras primarias $\Phi_\gamma^{(1)} = 0$ y $\Phi_\omega^{(1)} = 0$. La acción se escribe

$$S = \int_{M \times \mathbb{R}} (\pi_\gamma \wedge \dot{\gamma} + \pi_\omega \wedge \dot{\omega} - \mathcal{H}_{6d} - \Phi_\gamma^{(1)} \wedge v_\gamma - \Phi_\omega^{(1)} \wedge v_\omega) \wedge dt' \quad (4.35)$$

Vamos a estudiar la naturaleza de estas ligaduras. Debido a que $\Phi_\gamma^{(1)} = 0$, también tenemos $\dot{\Phi}_\gamma^{(1)} = \dot{\pi}_\gamma + \frac{1}{2}\dot{\gamma} = 0$. Usando ahora las ecuaciones de Hamilton se obtiene

$$-\frac{\partial \mathcal{H}_{6d}^*}{\partial \gamma} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{H}_{6d}^*}{\partial \pi_\gamma} = 0 \quad (4.36)$$

que implica que

$$-\frac{\partial \mathcal{H}_{6d}}{\partial \gamma} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{H}_{6d}}{\partial \pi_\gamma} + v_\gamma = 0 \quad (4.37)$$

Esta última ecuación implica que $\Phi_\gamma^{(1)}$ es una ligadura de segunda clase, de tal forma que podemos expresar v_γ en términos de las coordenadas y los momentos. En concreto

$$v_\gamma = d\omega \quad (4.38)$$

Por otro lado, de $\dot{\Phi}_\omega^{(1)} = \dot{\pi}_\omega = 0$ se obtiene

$$-\frac{\partial \mathcal{H}_{6d}^*}{\partial \omega} = -\frac{\partial \mathcal{H}_{6d}}{\partial \omega} = 0 \quad (4.39)$$

con lo que no podemos expresar v_ω en función de las coordenadas y los momentos. No obstante, de la ec. (4.39) se puede obtener la ligadura secundaria

$$\Phi_\omega^{(2)} := -\frac{\partial \mathcal{H}_{6d}}{\partial \omega} = d\gamma \quad (4.40)$$

Por último, de $\dot{\Phi}_\omega^{(2)} = d\dot{\gamma} = 0$ se deduce $dv_\gamma = 0$, lo cual ya sabíamos. Por consiguiente, vemos que, una vez situados dentro de la hipersuperficie de las ligaduras, las ligaduras $\Phi_\omega^{(1)}$ y $\Phi_\omega^{(2)}$ conmutan con todas las demás. Son, por tanto, ligaduras de primera clase. Hay que resaltar que, si queremos cuantizar el sistema, este es un hecho muy importante a tener en cuenta:

- $\Phi_\omega^{(1)}$ implica que las funciones de onda asociadas a los estados físicos del sistema no van a depender de ω .
- $\Phi_\omega^{(2)}$ implica que los estados físicos también han de satisfacer la condición

$$\widehat{d\gamma}|\psi\rangle = 0 \quad (4.41)$$

Por otro lado, $\Phi_\gamma^{(1)}$ constituye un conjunto de ligaduras de segunda clase. Para proceder de forma correcta debemos trabajar, por tanto, con pares coordenadas-momentos que se encuentren dentro de la hipersuperficie que satisface $\pi_\gamma + \frac{1}{2}\gamma = 0$. Como es bien sabido, esto es equivalente a trabajar con los corchetes de Dirac en vez de con los de Poisson.

En resumen, la descripción hamiltoniana del sistema es la de un sistema con las ligaduras

$$\Phi_\gamma^{(1)} := \pi_\gamma + \frac{1}{2}\gamma = 0 \quad (4.42)$$

$$\Phi_\omega^{(1)} := \pi_\omega = 0 \quad (4.43)$$

$$\Phi_\omega^{(2)} := d\gamma = 0 \quad (4.44)$$

Las primeras dos ligaduras son ligaduras primarias mientras que la última es una ligadura secundaria obtenida a partir de la segunda. Ambas, la segunda y la tercera, son ligaduras de primera clase. Por tanto las funciones de onda de los estados físicos no dependerán de ω y su dependencia en γ será tal que se verifique (4.41). En cambio, la eq. (4.42) constituye un conjunto de ligaduras de segunda clase, lo que implica que debemos trabajar con corchetes de Dirac.

De todas estas ligaduras se deduce que $H^3(M, \mathbb{R})$ es el espacio de fases físico del sistema. Una forma de verlo es seguir la técnica general de la ref. [73]. Ésta consiste en considerar la familia bidimensional de variaciones δ_1, δ_2 :

$$\delta_1 \delta_2 \mathcal{L} = \delta_1 E \wedge \delta_2 C + E \wedge \delta_1 \delta_2 C + \delta_1 d' \Theta_2 \quad (4.45)$$

Si definimos la 6-forma corriente simpléctica como

$$\omega(\delta_1 C, \delta_2 C) := \delta_1 \Theta_2 - \delta_2 \Theta_1 = -\delta_1 C \wedge \delta_2 C \quad (4.46)$$

podemos ver que

$$d' \omega(\delta_1 C, \delta_2 C) = \delta_2 E \wedge \delta_1 C - \delta_1 E \wedge \delta_2 C \quad (4.47)$$

esto es, $\omega(\delta_1 C, \delta_2 C)$ es una corriente conservada si las variaciones $\delta_1 C$ y $\delta_2 C$ parametrizan una familia bidimensional de soluciones. Si este es el caso, el funcional

$$\Omega(1, 2) := \int_M \omega(\delta_1 C, \delta_2 C) = - \int_M \delta_1 \gamma \wedge \delta_2 \gamma = - \langle \delta_1 \gamma, \delta_2 \gamma \rangle \quad (4.48)$$

es independiente de t' . Además, como M es compacto, $\Omega(1, 2)$ permanece invariante bajo el cambio $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + d'V$. $\Omega(1, 2)$ define una 2-forma en el espacio de configuraciones de la teoría y, para que sea no-degenerada, ésta debe estar restringida al subespacio en el que las configuraciones γ son elementos de $H^3(M, \mathbb{R})$. $\Omega(1, 2)$ es, por tanto, la forma simpléctica que da a $H^3(M, \mathbb{R})$ la estructura del espacio de fases.

4.3. Polarización de Kähler

En la sección anterior hemos visto que el espacio de fases de la teoría (4.1) es $H^3(M, \mathbb{R})$ con la forma simpléctica (4.48). Una forma de cuantizar esta teoría consiste en utilizar el procedimiento de la cuantización geométrica. En primer lugar elegimos como pre-espacio de Hilbert el formado por las funciones de la 3-forma $\gamma \in H^3(M, \mathbb{R})$. Posteriormente elegimos una estructura compleja concreta en M , es decir, un punto (t, \bar{t}) de \mathcal{M} . Al ser M Kähler, el espacio vectorial de p -formas armónicas en M es suma directa de los espacios vectoriales de (p_1, p_2) -formas Dolbeault-armónicas, con $p = p_1 + p_2$. De esta manera, la estructura compleja en M induce una estructura compleja en $H^3(M, \mathbb{R})$

$$H^3(M) = H^{3,0}(M) \oplus H^{2,1}(M) \oplus H^{1,2}(M) \oplus H^{0,3}(M) \quad (4.49)$$

Dado que Ω es base de $H^{3,0}(M)$, y las formas $\mathcal{D}_i \Omega$ forman base de $H^{2,1}(M)$, tenemos la descomposición

$$\gamma = \lambda^{-1} \Omega + x^i \mathcal{D}_i \Omega + \bar{x}^{\bar{j}} \bar{\mathcal{D}}_{\bar{j}} \bar{\Omega} + \bar{\lambda}^{-1} \bar{\Omega} \in H^3(M, \mathbb{R}) \quad (4.50)$$

Dado que al cambiar de parche en \mathcal{M} Ω cambia según la transformación de Kähler

$$\Omega \rightarrow \exp[f(t)] \Omega \quad (4.51)$$

la descomposición (4.50) es única salvo transformación de Kähler. Esto implica que λ^{-1} es sección de \mathcal{L}^{-1} , mientras que x^i son secciones de $\mathcal{L}^{-1} \otimes T^{(1,0)}\mathcal{M}$. Llamamos a estas coordenadas complejas $(\lambda^{-1}, x^i, \bar{x}^{\bar{i}}, \bar{\lambda}^{-1})$ de $H^3(M, \mathbb{R})$ coordenadas de Kähler. Por último tomamos como espacio de Hilbert \mathcal{H}_0 el formado por las funciones holomorfas de $(\lambda^{-1}, x^i)^1$.

En estas coordenadas, la ligadura $\Phi_\gamma^{(1)} := \pi_\gamma + \frac{1}{2}\gamma$ se escribe de la forma

$$\begin{aligned} \pi_{\lambda^{-1}} &:= \pi = -\frac{i}{2} e^{-K} \bar{\lambda}^{-1} = -\frac{1}{2} W_{pq}(X) \\ \pi_{\bar{\lambda}^{-1}} &:= \bar{\pi} = +\frac{i}{2} e^{-K} \lambda^{-1} = -\frac{1}{2} \bar{W}_{pq}(\bar{X}) \\ \pi_{x^i} &:= \pi_i = +\frac{i}{2} e^{-K} G_{i\bar{j}} \bar{x}^{\bar{j}} = -\frac{1}{2} \mathcal{D}_i W_{pq}(X) \\ \pi_{\bar{x}^{\bar{i}}} &:= \bar{\pi}_{\bar{i}} = -\frac{i}{2} e^{-K} G_{j\bar{i}} x^j = -\frac{1}{2} \bar{\mathcal{D}}_{\bar{i}} \bar{W}_{pq}(\bar{X}) \end{aligned} \quad (4.52)$$

y tenemos los corchetes de Poisson

$$\{\lambda^{-1}, \pi\} = 1 \quad (4.53)$$

¹Veremos más adelante que esta condición implica que las funciones de onda no son normalizables de la forma usual. Hay que señalar también que el espacio de Hilbert físico $\mathcal{H}_{\text{phys}}$ será más pequeño aun, porque hay que imponer también la condición (4.41).

$$\{\bar{\lambda}^{-1}, \bar{\pi}\} = 1 \quad (4.54)$$

$$\{x^i, \pi_j\} = \delta_j^i \quad (4.55)$$

$$\{\bar{x}^{\bar{i}}, \bar{\pi}_{\bar{j}}\} = \delta_{\bar{j}}^{\bar{i}} \quad (4.56)$$

Como hemos discutido en la sección anterior, el hecho de que $\Phi_\gamma^{(1)}$, que en las ecuaciones (4.52) está descompuesta en cuatro ligaduras $(\chi_0, \bar{\chi}_0, \chi_i, \bar{\chi}_{\bar{i}})$, sea de segunda clase implica que las coordenadas canónicas adecuadas con las que deberíamos trabajar son aquellas tales que tengan corchetes de Poisson iguales a los corchetes de Dirac $\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \chi\}\{\chi, \chi\}^{-1}\{\chi, B\}$. Éstos se escriben

$$\{\lambda^{-1}, \pi\}_D = \frac{1}{2} \quad (4.57)$$

$$\{\bar{\lambda}^{-1}, \bar{\pi}\}_D = \frac{1}{2} \quad (4.58)$$

$$\{x^i, \pi_j\}_D = \frac{1}{2}\delta_j^i \quad (4.59)$$

$$\{\bar{x}^{\bar{i}}, \bar{\pi}_{\bar{j}}\}_D = \frac{1}{2}\delta_{\bar{j}}^{\bar{i}} \quad (4.60)$$

Tras cuantizar la teoría estos corchetes de Dirac dan lugar a los conmutadores

$$[\lambda^{-1}, \pi] = \frac{i\hbar}{2} \quad (4.61)$$

$$[\bar{\lambda}^{-1}, \bar{\pi}] = \frac{i\hbar}{2} \quad (4.62)$$

$$[x^i, p_j] = \frac{i\hbar}{2}\delta_j^i \quad (4.63)$$

$$[\bar{x}^{\bar{i}}, \bar{p}_{\bar{j}}] = \frac{i\hbar}{2}\delta_{\bar{j}}^{\bar{i}} \quad (4.64)$$

que escribimos de la forma

$$[\lambda^{-1}, \bar{\lambda}^{-1}] = -\hbar e^K \quad (4.65)$$

$$[x^i, \bar{x}^{\bar{j}}] = \hbar e^K G^{i\bar{j}}$$

Nótese que, dado que la métrica $G_{i\bar{j}}$ de \mathcal{M} es definido-positiva, de (4.65) se obtiene que $\bar{\lambda}^{-1}$ y x^i actúan como operadores de aniquilación. Este hecho nos sugiere que trabajemos con el espacio de Hilbert formado por las funciones de $(\bar{\lambda}^{-1}, x^i)$. Si definimos $Q := 2i\pi = e^{-K}\bar{\lambda}^{-1}$, podemos entender este espacio de Hilbert como el generado por los estados coherentes $|x, Q\rangle$, que son los autoestados de $\hat{\lambda}^{-1}$ y \hat{x}^i :

$$\hat{Q}|x, Q\rangle = Q|x, Q\rangle \quad (4.66)$$

$$\hat{x}^i|x, Q\rangle = x^i|x, Q\rangle \quad (4.67)$$

Sin embargo, veremos más adelante que, para poder establecer la conexión con la cuerda topológica, hay que trabajar con el espacio de Hilbert generado por los estados

coherentes² no normalizables $|x, \lambda^{-1}\rangle$:

$$\hat{\lambda}^{-1}|x, \lambda^{-1}\rangle = \lambda^{-1}|x, \lambda^{-1}\rangle \quad (4.68)$$

$$\hat{x}^i|x, \lambda^{-1}\rangle = x^i|x, \lambda^{-1}\rangle \quad (4.69)$$

de tal forma que las funciones de onda de este espacio de Hilbert se escriben

$$\psi(x, \lambda^{-1}) = \langle \psi | x, \lambda^{-1} \rangle \quad (4.70)$$

Siguiendo la teoría de estados comprimidos (véase apéndice A) podemos escribir estos estados en términos del estado comprimido “vacío”, $|0, 0\rangle$. Según cómo hagamos ésto así tendremos una normalización relativa con respecto a $|0, 0\rangle$ de un tipo o de otro. La normalización relativa adecuada para establecer la conexión con la cuerda topológica es aquella en la que, usando notación del apéndice, el estado comprimido $|\beta\rangle_{\text{bad}}$ se define como $e^{\beta\hat{b}^\dagger}|0\rangle$. Esto es

$$|x, \lambda^{-1}\rangle = \exp \left[-\frac{1}{\hbar} e^{-K} \hat{\bar{\lambda}}^{-1} \lambda^{-1} + \frac{1}{\hbar} e^{-K} x^i \hat{\bar{x}}^{\bar{j}} G_{i\bar{j}} \right] |0, 0\rangle \quad (4.71)$$

Nótese que esta forma de definir los estados comprimidos, que no es la habitual en mecánica cuántica, asegura que éstos tengan una dependencia holomorfa en (x, λ^{-1}) . Pero el precio que se paga por conseguir esta dependencia holomorfa es que éstos estados tienen una “mala” normalización relativa, es decir

$$\frac{\langle \bar{x}', \bar{\lambda}^{-1'} | x, \lambda^{-1} \rangle}{\langle \bar{0}, \bar{0} | 0, 0 \rangle} = \exp \left[-\frac{1}{\hbar} e^{-K} \bar{\lambda}^{-1'} \lambda^{-1} + \frac{1}{\hbar} e^{-K} x^i \bar{x}'^{\bar{j}} G_{i\bar{j}} \right] \quad (4.72)$$

Asímismo, el hecho de que las coordenadas de Kähler no sean funciones en \mathcal{M} , sino secciones de recubrimientos sobre \mathcal{M} , implica que podemos asignar a $|x, \lambda^{-1}\rangle$ la propiedad de ser también secciones. Evidentemente, lo más sencillo sería definirlos como funciones, pero, de nuevo, para poder establecer la conexión con la cuerda topológica, es conveniente definirlos como secciones de $\mathcal{L}^{\frac{h+1}{2}} \otimes \kappa_{\mathcal{M}}^{1/2}$, donde $h := h_{2,1}(M)$ y $\kappa_{\mathcal{M}}$ es el recubrimiento canónico de \mathcal{M} . Dado que la medida adecuada para la integración sobre $H^3(M, \mathbb{R})$ en coordenadas de Kähler es $d^h x d^h \bar{x} d\lambda^{-1} d\bar{\lambda}^{-1} \exp[-(h+1)K] |G|$, con $|G| = \det(G_{i\bar{j}})$, la relación de “sobrecompletitud” para estos estados se escribe

$$\mathbb{I} = \int d\mu_{x, \lambda^{-1}} \exp \left[+\frac{1}{\hbar} e^{-K} \bar{\lambda}^{-1} \lambda^{-1} - \frac{1}{\hbar} e^{-K} x^i \bar{x}^{\bar{j}} G_{i\bar{j}} \right] |x, \lambda^{-1}\rangle \langle \bar{x}, \bar{\lambda}^{-1}| \quad (4.73)$$

donde

$$d\mu_{x, \lambda^{-1}} = d^h x d^h \bar{x} d\lambda^{-1} d\bar{\lambda}^{-1} |G|^{1/2} \exp \left[-\frac{(h+1)}{2} K \right] \quad (4.74)$$

Nótese que en este procedimiento de cuantización de $H^3(M, \mathbb{R})$ no ha sido necesario fijar ninguna base simpléctica $(\beta^I, -\alpha_J)$. En cambio, los estados $|x, \lambda^{-1}\rangle$ y, por tanto,

²Como veremos también más adelante, en rigor se trata de estados coherentes generalizados o estados “comprimidos” (véase apéndice A). A partir de este momento los denominaremos así.

también las funciones de onda $\psi(x, \lambda^{-1})$ dependen de la estructura compleja de base elegida.

Resulta útil trabajar también con variables y funciones que sean invariantes antes transformaciones de Kähler. Esto se puede conseguir si introducimos las denominadas variables “grandes” del espacio de fases

$$\gamma = \frac{1}{2} (x^I \partial_I \Omega + cc) \implies \quad (4.75)$$

$$\implies \frac{1}{2} x^I = \lambda^{-1} X^I + x^i \mathcal{D}_i X^I \quad (4.76)$$

Debido a la última relación, se tiene que los autoestados comunes de \hat{x}^i y $\hat{\lambda}^{-1}$ son los mismos que los autoestados de \hat{x}^I . Por tanto, tenemos

$$|x^I\rangle = |x^i, \lambda^{-1}\rangle \quad (4.77)$$

salvo transformación de Kähler. El tensor que actuá como métrica para estas variables es

$$\text{Im}\tau_{IJ} = -2i(\bar{\partial}_J \partial_I K) e^{-K} \quad (4.78)$$

y se tiene que

$$-\frac{1}{\hbar} e^{-K} \bar{\lambda}^{-1} \lambda^{-1} + \frac{1}{\hbar} e^{-K} x^i \bar{x}^j G_{i\bar{j}} = +\frac{1}{2\hbar} x^I \text{Im}\tau_{IJ} \bar{x}^J \quad (4.79)$$

Por tanto,

$$|x\rangle = \exp \left[+\frac{1}{2\hbar} x^I \text{Im}\tau_{IJ} \hat{\bar{x}}^J \right] |0\rangle \quad (4.80)$$

$$\frac{\langle \bar{x} | x \rangle}{\langle \bar{0} | 0 \rangle} = \exp \left[+\frac{1}{2\hbar} x^I \text{Im}\tau_{IJ} \bar{x}^J \right] \quad (4.81)$$

La medida para la integración en las coordenadas (x^I, \bar{x}^J) es $d^{h+1}x d^{h+1}\bar{x} |\text{Im}\tau|$, con $|\text{Im}\tau| = \det [\text{Im}\tau_{IJ}]$. La relación de “sobrecompletitud” se escribe

$$\mathbb{I} = \int d\mu_x \exp \left[-\frac{1}{2\hbar} x^I \text{Im}\tau_{IJ} \bar{x}^J \right] |x\rangle \langle \bar{x}| \quad (4.82)$$

donde $d\mu_x = d^{h+1}x d^{h+1}\bar{x} |\text{Im}\tau|^{1/2}$. Nótese que, para poder introducir estas variables, ha sido necesario fijar una base simpléctic de homología. No obstante, la relación (4.77) nos indica que esta dependencia en la base simpléctica elegida no es más que un artificio de haber usado las variables “grandes”. La regla de cuantización en estas variables es

$$[x^I, \bar{x}^J] = 2\hbar [\text{Im}\tau(X)]^{-1IJ} \quad (4.83)$$

4.4. Polarización real

Hay otra forma conceptualmente distinta de cuantizar el espacio de fases $H^3(M, \mathbb{R})$. Se trata de la denominada “cuantización real”. Ésta consiste, en vez de en fijar una estructura compleja concreta en M , en fijar una base simpléctica concreta $(\beta^I, -\alpha_J)$ en $H^3(M)$. Esto da lugar a trabajar con las “coordenadas de polarización real”

$$\gamma = p^I \alpha_I + q_I \beta^I \in H^3(M, \mathbb{R}) \quad (4.84)$$

La relación entre estas coordenadas y las variables “grandes” es

$$\begin{aligned} p^I &= \operatorname{Re} [x^I] \\ q_I &= \operatorname{Re} [\tau_{IJ}(X) x^J] \end{aligned} \quad (4.85)$$

donde (X^I, \bar{X}^I) denota la estructura compleja concreta en la que se han definido las coordenadas x^I . También podemos escribir

$$x^I = -i [\operatorname{Im} \tau(X)]^{-1IJ} [q_J - \bar{\tau}_{JK}(X) p^K] \quad (4.86)$$

Nótese que, como tanto las x^I como las τ_{IJ} son invariantes ante una transformación de Kähler, en esta última relación se manifiesta explícitamente que las coordenadas de polarización real también son Kähler-invariantes. Obsérvese que, de las relaciones (4.85) y (4.76) se tiene que, si γ fuera la 3-forma asociada al agujero negro Calabi-Yau de los capítulos anteriores, en el punto del atractor (sin corregir) se verificaría que $x^I = (CX^I)_{p,q}$ y $x^i_{p,q} = 0$.

La regla de cuantización en estas variables es

$$[q_I, p^J] = i\hbar \delta_I^J \quad (4.87)$$

Por tanto, los operadores \hat{q}_J y \hat{p}^J se comportan como los operadores coordenadas y momentos en mecánica cuántica ordinaria, y sus autoestados $|q\rangle$ y $|p\rangle$ conforman las representaciones coordenada y momento ordinarias. En otras palabras, el hecho de, en vez de fijar una estructura compleja de base $(\Omega, \bar{\Omega})$, elegir una base simpléctica concreta (β^I, α_J) nos permite construir un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\beta\alpha}$. Este espacio es el espacio de representaciones unitarias irreducibles del álgebra de Heisenberg (4.87), esto es, el formado por las funciones³

$$\psi(p) = \langle \psi | p \rangle \quad (4.88)$$

³Más precisamente, se trata del espacio de funciones $\psi(p)$ con una condición dada. Por ejemplo, esta condición podría ser que sean funciones de cuadrado integrable. Para poder establecer la conexión con la cuerda topológica esta condición la vamos a fijar trabajando con el espacio generado por las funciones no normalizables $\langle p|x, \lambda^{-1} \rangle$. Hay que indicar también que $\mathcal{H}_{\beta\alpha}$ no es todavía el espacio de Hilbert físico $\mathcal{H}_{\text{phys}}$ del sistema. Para obtener $\mathcal{H}_{\text{phys}}$ hay que imponer la condición adicional (4.41).

sobre las que los operadores \hat{p}, \hat{q} actúan de la forma

$$\hat{p}\psi(p) = p\psi(p) \quad (4.89)$$

$$\hat{q}\psi(p) = -i\hbar \frac{\partial \psi(p)}{\partial p} \quad (4.90)$$

La relación entre los vectores base de ambas polarizaciones (real y de Kähler) es

$$\langle p|x \rangle = \sqrt{|\text{Im}\tau|} \exp \left[-\frac{i}{2\hbar} p^I \bar{\tau}_{IJ} p^J + \frac{1}{\hbar} p^I \text{Im}\tau_{IJ} x^J - \frac{1}{4\hbar} x^I \text{Im}\tau_{IJ} x^J \right] \quad (4.91)$$

Por tanto, podemos escribir las funciones de onda en polarización de Kähler en términos de las de polarización real sin más que hacer el cambio de base

$$\langle \psi|x \rangle = \sqrt{|\text{Im}\tau|} \int dp \langle \psi|p \rangle \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \hat{S}(p, x) \right] \quad (4.92)$$

donde

$$\hat{S}(p, x) := \frac{1}{2} p^I \bar{\tau}_{IJ} p^J + i p^I \text{Im}\tau_{IJ} x^J - \frac{i}{4} x^I \text{Im}\tau_{IJ} x^J \quad (4.93)$$

es la función generatriz de la transformación “canónica” lineal (4.85) que lleva de la polarización real a la de Kähler. Escribimos “canónica” entre comillas porque se trata de una transformación que no preserva exactamente las relaciones de conmutación. Insistimos de nuevo en que se trata de una transformación que viene dada por coeficientes que dependen de la estructura compleja de base elegida y que este es el motivo por el que se obtiene, a partir de una función de onda $\psi(p)$ totalmente independiente de la estructura compleja de base, una que sí depende de ésta.

Nótese que, de la relación (4.91), se tiene que, desde el punto de vista de la polarización real, los estados $|x\rangle$ son, de hecho, estados comprimidos (squeezed states) centrados en un punto (p, q) del espacio de fases dado por (4.85), y con una anchura que viene dada por la estructura compleja (t, \bar{t}) de base elegida. En concreto se tiene

$$\begin{aligned} (\Delta q)_I (\Delta q)_J &= \frac{\hbar}{2} \left[\left(\mathbb{I} + \text{Re}\tau(X) (\text{Im}\tau(X))^{-1} \right)_I^K \text{Im}\tau_{KL}(X) \left(\mathbb{I} + (\text{Im}\tau(X))^{-1} \text{Re}\tau(X) \right)_J^L \right] \\ (\Delta p)^I (\Delta p)^J &= \frac{\hbar}{2} (\text{Im}\tau(X))^{-1IJ} \end{aligned} \quad (4.94)$$

Se observa que las cantidades que juegan el papel de “parámetros de deformación” (squeezing parameters) del estado comprimido son $\text{Re}\tau_{IJ}(X)$ ya que son las responsables de que la incertidumbre cuántica $\Delta q_I \Delta p^I$ (sin suma) sea mayor que $\hbar/2$. En cambio, las cantidades $\text{Im}\tau_{IJ}(X)$ juegan el papel de “frecuencias” (véase apéndice A).

Si escogemos en cambio una base simpléctica distinta $(\tilde{\beta}^I, -\tilde{\alpha}_J)$, las nuevas variables (\tilde{p}, \tilde{q}) vendrán dadas en función de las antiguas por

$$\begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D} & \mathcal{C} \\ \mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad (4.95)$$

con $\mathcal{DA}-\mathcal{CB} = \mathbb{I}$, y satisfacen el mismo álgebra de Heisenberg (4.87). La transformación (4.95) es, por tanto, una transformación canónica, con función generatriz

$$S(p, \tilde{p}) = -\frac{1}{2}p^I(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{D})_{IJ}p^J + p^I\mathcal{C}_{IJ}^{-1}\tilde{p}^J - \frac{1}{2}\tilde{p}^I(\mathcal{AC}^{-1})_{IJ}\tilde{p}^J \quad (4.96)$$

De todo esto es claro que las funciones de onda en polarización real $\langle\psi|p\rangle$ no son invariantes simplécticas. Los espacios $\mathcal{H}_{\beta\alpha}$ y $\mathcal{H}_{\tilde{\beta}\tilde{\alpha}}$, aunque isomorfos, están relacionados por un operador unitario no trivial $\hat{T}_{(\beta,\alpha)(\tilde{\beta},\tilde{\alpha})}$ que puede escribirse como una transformación de Fourier generalizada

$$\langle\psi|\tilde{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{h_{2,1}+1}{2}}} \int dp \langle\psi|p\rangle \exp\left[-\frac{i}{\hbar}S(p, \tilde{p})\right] \quad (4.97)$$

Estos operadores constituyen una representación multivaluada del grupo simpléctico $Sp(2h+2, \mathbb{R})$ denominada representación metapléctica. Si escribimos la función de onda $\psi(p)$ como una serie en potencias de \hbar

$$\langle\psi|p\rangle = \exp \sum_{g=0} \hbar^{g-1} \varphi_g(p) \quad (4.98)$$

y expandimos la integral (4.97) en torno al punto de silla $p_{\text{cl}}(\tilde{p})$, que es la solución de

$$\frac{\partial \varphi_0(p)}{\partial p^I} - i \frac{\partial S(p, \tilde{p})}{\partial p^I} = 0 \quad (4.99)$$

la ecuación (4.97) se reduce a

$$\tilde{\varphi}_g(\tilde{p}) = \varphi(p_{\text{cl}}) + \Gamma_g [\Delta^{IJ}, \partial_{I_1, \dots, I_n} \varphi_{r < g}(p_{\text{cl}})] \quad (4.100)$$

donde las cantidades Γ_g vienen dadas por diagramas de Feynman [96] con propagador el inverso de

$$\Delta_{IJ} = i \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial p^I \partial p^J}(p_{\text{cl}}) - (\mathcal{C}^{-1}\mathcal{D})_{IJ} \quad (4.101)$$

y vértices dados por $\partial_{I_1, \dots, I_n} \varphi_{r < g}(p_{\text{cl}})$.

Llegado a este punto, tenemos que abordar la siguiente sutileza. Un subgrupo de las transformaciones simplécticas es el denominado grupo modular $\Gamma \subset Sp(2h+2, \mathbb{R})$. Éste está formado por aquellas transformaciones simplécticas $X^I \rightarrow \tilde{X}^I$ tales que pueda hacerse después un cambio

$$\Omega \rightarrow \Omega' \quad (4.102)$$

que devuelva los X^I a sus valores originales

$$\tilde{X}^I \rightarrow \tilde{X}''^I = X^I \quad (4.103)$$

Se considera entonces que Ω y Ω' corresponden a la misma estructura compleja. Esto se debe a que, si denotamos por \mathcal{T} el espacio de Teichmüller de M , en el que (X^I, \bar{X}^I)

son coordenadas proyectivas, el espacio de moduli de estructuras complejas \mathcal{M} no es exactamente \mathcal{T} , sino

$$\mathcal{M} = \mathcal{T}/\Gamma \quad (4.104)$$

Llamemos $H^3(M_{(\Omega, \bar{\Omega})}, \mathbb{C})$ al espacio vectorial generado por los vectores $(\Omega, \mathcal{D}_i \Omega, \bar{\mathcal{D}}_{\bar{i}} \bar{\Omega}, \bar{\Omega})$. Es claro que los espacios vectoriales correspondientes a distintos puntos $(\Omega, \bar{\Omega})$ de \mathcal{T} son isomorfos. El recubrimiento $H^3(M_{(\Omega, \bar{\Omega})}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{T}$ tiene una conexión plana (la conexión de Gauss-Manin), con lo que el isomorfismo entre las distintas fibras no depende del camino seguido para ir de un punto de \mathcal{T} a otro. Sin embargo, la relación (4.104) implica que el recubrimiento $H^3(M_{(t, \bar{t})}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}$ puede tener monodromías no triviales. En efecto, dado un punto $(t^{n,m}, \bar{t}^{n,m})$ de \mathcal{M} correspondiente a una estructura compleja en la que el 3-ciclo

$$\mathcal{C}_{n,m} = m_I A^I - n^J B_J \quad (4.105)$$

colapsa, podemos seguir un camino en \mathcal{M} cerrado homotópicamente no trivial rodeando a $t^{n,m}$. Este camino corresponde a un camino abierto en \mathcal{T} que une dos puntos relacionados por una transformación modular. Se tiene entonces un isomorfismo no trivial $H^3(M_{(\Omega, \bar{\Omega})}, \mathbb{C}) \rightarrow H^3(M_{(\Omega', \bar{\Omega}'), \mathbb{C})}$ mediante el cual

$$\beta^I \rightarrow \beta^I + n^I \mathcal{C}_{n,m} \quad (4.106)$$

$$\alpha_J \rightarrow \alpha_J - m_J \mathcal{C}_{n,m} \quad (4.107)$$

Estas transformaciones definen $(\beta^I, -\alpha_J)$ como secciones covariantemente planas del recubrimiento $H^3(M_{(\Omega, \bar{\Omega})}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{T}$. La correspondiente transformación modular para la base de ciclos es

$$A^I \rightarrow A^I + n^I \mathcal{C}_{n,m} \quad (4.108)$$

$$B_J \rightarrow B_J + m_J \mathcal{C}_{n,m} \quad (4.109)$$

y para las coordenadas de polarización real

$$p^I \rightarrow p'^I = p^I + n^I (m_J p^J - n^J q_J) \quad (4.110)$$

$$q_J \rightarrow q'_J = q_J + m_J (m_I p^I - n^I q_I) \quad (4.111)$$

Nótese que, si hubiéramos considerado la cuantización de sólo la subvariedad lagrangiana L de $H^3(M)$, entonces

- $\gamma \in L$ ya no sería una 3-forma real y las variables p y q verificarían la relación de geometría especial $q_I = \frac{\partial F_0}{\partial p^I}$.
- Los operadores \hat{p} y \hat{q} ya no sería hermíticos.
- Sólo tendríamos la libertad de hacer una transformación simpléctica, para cambiar la base de 3-formas, que sea modular, ya que sólo entonces podríamos encontrar un γ' tal que $(p', q') = (\tilde{p}, \tilde{q})$.

Esto es precisamente lo que se hace en la ref. [96]. En cambio, insistimos aquí en que el espacio de fases que estamos cuantizando está parametrizado por una 3-forma real γ . Por tanto, las variables p^I y q_I son reales, no verifican la relación de geometría especial, y sus operadores correspondientes son hermíticos. No obstante, vamos a suponer que γ pertenece al conjunto de 3-formas para las que puede encontrarse una estructura compleja Ω_γ tal que

$$\gamma = \Omega_\gamma + \bar{\Omega}_\gamma \quad (4.112)$$

es decir, que sólo vamos a considerar aquellos (p^I, q_I) tales que exista solución a las ecuaciones del atractor (2.96). Con esta restricción ocurre, al igual que en la ref. [96], que sólo tenemos la libertad de hacer una transformación simpléctica, para cambiar la base, que sea modular.

4.5. La función de partición de la cuerda topológica como un estado cuántico

Hemos visto en la sección 4.3 que la elección de un punto $(t, \bar{t}) \in \mathcal{M}$ (más concretamente, de un punto $(\Omega, \bar{\Omega}) \in \mathcal{T}$) nos permite construir un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\Omega\bar{\Omega}}$. Este espacio es el espacio de representaciones del álgebra (4.65), esto es, el formado por las funciones⁴

$$\psi(\lambda^{-1}, x; \Omega, \bar{\Omega}) = \langle \psi | \lambda^{-1}, x \rangle_{\Omega, \bar{\Omega}} \quad (4.113)$$

sobre las que los operadores $\hat{\lambda}^{-1}, \hat{x}, \hat{\lambda}^{-1}, \hat{\bar{x}}$, actúan de la forma

$$\hat{\lambda}^{-1} \psi(\lambda^{-1}, x; \Omega, \bar{\Omega}) = \lambda^{-1} \psi(\lambda^{-1}, x; \Omega, \bar{\Omega}) \quad (4.114)$$

$$\hat{x}^i \psi(\lambda^{-1}, x; \Omega, \bar{\Omega}) = x^i \psi(\lambda^{-1}, x; \Omega, \bar{\Omega}) \quad (4.115)$$

$$\hat{\lambda}^{-1} \psi(\lambda^{-1}, x; \Omega, \bar{\Omega}) = -\hbar e^K \frac{\partial}{\partial \lambda^{-1}} \psi(\lambda^{-1}, x; \Omega, \bar{\Omega}) \quad (4.116)$$

$$\hat{\bar{x}}^{\bar{j}} \psi(\lambda^{-1}, x; \Omega, \bar{\Omega}) = \hbar e^K G^{\bar{i}\bar{j}} \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}} \psi(\lambda^{-1}, x; \Omega, \bar{\Omega}) \quad (4.117)$$

Estas funciones de onda no se mantendrán invariantes si cambiamos la estructura compleja $(t, \bar{t}) \rightarrow (\check{t}, \check{\bar{t}})$. Una forma de ver físicamente qué es lo que ocurre consiste en darse cuenta de que, si bien el punto en el que están centrados los estados comprimidos $|\lambda^{-1}, x\rangle_{\Omega, \bar{\Omega}}$ no cambia, sí que cambia la anchura (4.94) de éstos. Del hecho de que γ es invariante ante este cambio de estructura compleja se obtienen las relaciones

$$\partial_i \lambda^{-1} = \lambda^{-1} \partial_i K \quad (4.118)$$

$$\partial_i x^k = -\lambda^{-1} \delta_i^k + x^j \Gamma_{ij}^k + \partial_i K x^k \quad (4.119)$$

$$\partial_i \bar{\lambda}^{-1} = -G_{\bar{i}\bar{i}} \bar{x}^{\bar{i}} \quad (4.120)$$

$$\partial_i \bar{x}^{\bar{k}} = e^K G^{\bar{k}k} C_{ijk} x^j \quad (4.121)$$

⁴Remarcamos e nuevo que se trata del espacio generado por las funciones $\langle x', \lambda^{-1'} | x, \lambda^{-1} \rangle$.

más sus complejas conjugadas. Si consideramos que la transformación es infinitesimal y expandimos los operadores de aniquilación transformados en términos de las variaciones con respecto de la estructura compleja antigua tenemos, a primer orden

$$\bar{\lambda}^{-1} = \bar{\lambda}^{-1} - G_{i\bar{i}} \bar{x}^{\bar{i}} (\check{t} - t)^i + \bar{\lambda}^{-1} \bar{\partial}_{\bar{j}} K (\check{t} - \bar{t})^{\bar{j}} \quad (4.122)$$

$$\check{x}^i = x^i + (-\lambda^{-1} \delta_j^i + x^k \Gamma_{jk}^i + \partial_j K x^i) (\check{t} - t)^j + e^K G^{i\bar{i}} \bar{C}_{i\bar{j}k} \bar{x}^{\bar{k}} (\check{t} - \bar{t})^{\bar{j}} \quad (4.123)$$

Esta transformación, al mezclar operadores creación con aniquilación, lleva consigo transformaciones de Bogoliubov sobre los estados comprimidos. En concreto se tiene

$$\left[\frac{\partial}{\partial \bar{t}^i} - \frac{\hbar}{2} e^{2K} \bar{C}_{i\bar{j}k} G^{j\bar{j}} G^{k\bar{k}} \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k} - G_{ij} x^j \frac{\partial}{\partial \lambda^{-1}} \right] |\lambda^{-1}, x\rangle_{\Omega\bar{\Omega}} = 0 \quad (4.124)$$

$$\left[\tilde{\nabla}_i - \Gamma_{ij}^k x^j \frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \partial_i \log |G| - \lambda^{-1} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2\hbar} C_{ijk} x^i x^j \right] |\lambda^{-1}, x\rangle_{\Omega\bar{\Omega}} = 0 \quad (4.125)$$

donde

$$\tilde{\nabla}_i = \frac{\partial}{\partial t^i} + \partial_i K \left(x^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \lambda^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda^{-1}} + \frac{h+1}{2} \right) \quad (4.126)$$

En variables “grandes” estas ecuaciones se escriben

$$\left[\frac{\partial}{\partial \bar{X}^{\bar{I}}} - \frac{\hbar}{2} \bar{C}_{\bar{I}\bar{J}\bar{K}} (\text{Im}\tau)^{-1\bar{J}J} (\text{Im}\tau)^{-1\bar{K}K} \frac{\partial^2}{\partial x^J \partial x^K} \right] |x\rangle = 0 \quad (4.127)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial X^I} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X^I} \log |\text{Im}\tau| + \frac{i}{2} C_{IJK} (\text{Im}\tau)^{-1KL} x^J \frac{\partial}{\partial x^L} + \frac{1}{8\hbar} C_{IJK} x^J x^K \right] |x\rangle = 0 \quad (4.128)$$

Suponiendo que el estado $\langle\psi|$ es independiente de la estructura compleja de base, se tiene que

$$\left[\frac{\partial}{\partial \bar{t}^i} - \frac{\hbar}{2} e^{2K} \bar{C}_{i\bar{j}k} G^{j\bar{j}} G^{k\bar{k}} \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k} - G_{ij} x^j \frac{\partial}{\partial \lambda^{-1}} \right] \psi(\lambda^{-1}, x; \Omega, \bar{\Omega}) = 0 \quad (4.129)$$

$$\left[\tilde{\nabla}_i - \Gamma_{ij}^k x^j \frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \partial_i \log |G| - \lambda^{-1} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2\hbar} C_{ijk} x^i x^j \right] \psi(\lambda^{-1}, x; \Omega, \bar{\Omega}) = 0$$

Estas ecuaciones dan a las funciones de onda asociadas al estado $\langle\psi|$ la estructura de secciones covariantemente constantes del recubrimiento $\mathcal{H}_{\Omega\bar{\Omega}} \rightarrow \mathcal{T}$.

El primer paso en la conexión entre la cuantización de $H^3(M, \mathbb{R})$ y la cuerda topológica viene de darse cuenta [12] de que la variación de los estados comprimidos $|x, \lambda^{-1}\rangle$ con respecto a la estructura compleja de base (t, \bar{t}) es exactamente igual a la dada por las ecuaciones de la anomalía holomorfa [14] (véase la sección 3.2) que gobiernan la dependencia en el background de la función de partición de la teoría de cuerdas topológicas modelo B en M . Para ver esto en detalle, resolvamos localmente la ecuación de la anomalía holomorfa (3.39) para F_1 :

$$F_1 = -\frac{1}{2} \log |G| + \left(\frac{h+1}{2} - \frac{\chi}{24} + 1 \right) K + f_1(t) + \bar{f}_1(\bar{t}) \quad (4.130)$$

donde $f_1(t)$ es una función holomorfa que no puede determinarse por las ecs. (3.39). Definimos la función “cuerda topológica” de Verlinde [92] como

$$\psi_{\text{top}}(\lambda^{-1}, x; t, \bar{t}) = e^{f_1(t)} Z_{\text{top}}(\sqrt{\hbar}\lambda, \lambda x; t, \bar{t}) \quad (4.131)$$

Puede verse que las ecuaciones de variación de $\psi_{\text{top}}(\lambda^{-1}, x; t, \bar{t})$ con respecto a (t, \bar{t}) son las mismas que las de los estados comprimidos $|x^i, \lambda^{-1}\rangle_{\Omega, \bar{\Omega}}$. En efecto,

- la serie de potencias de $\sqrt{\hbar}\lambda$ a la que da lugar la suma en género se convierte en una serie de potencias de la constante de Planck.
- la sección de $T^{(1,0)}\mathcal{M}$ que parametriza las deformaciones (3.33) es ahora λx^i .
- Para poder unir las soluciones locales (4.130) en un F_1 definido globalmente en \mathcal{M} , $\exp f_1(t)$ ha de transformar como una sección de $\mathcal{L}^{\frac{\chi}{24}-1-\frac{h+1}{2}} \otimes \kappa_{\mathcal{M}}^{1/2}$. Esto hace que ψ_{top} sea, al igual que $|x^i, \lambda^{-1}\rangle_{\Omega, \bar{\Omega}}$, una sección de $\mathcal{L}^{\frac{h+1}{2}} \otimes \kappa_{\mathcal{M}}^{1/2}$.
- Las ecuaciones (3.43) y (3.44) implican para ψ_{top} que

$$\left[\frac{\partial}{\partial \bar{t}^i} - \frac{\hbar}{2} e^{2K} \bar{C}_{ij\bar{k}} G^{j\bar{j}} G^{k\bar{k}} \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k} - G_{ij} x^j \frac{\partial}{\partial \lambda^{-1}} \right] \psi_{\text{top}} = 0 \quad (4.132)$$

$$\left[\tilde{\nabla}_i - \Gamma_{ij}^k x^j \frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \partial_i \log |G| - \lambda^{-1} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2\hbar} C_{ijk} x^i x^j \right] \psi_{\text{top}} = 0 \quad (4.133)$$

Esto indica que podemos definir un estado $\langle \psi_{\text{top}} |$ del espacio de Hilbert de la cuantización de $H^3(M, \mathbb{R})$, independiente de la estructura compleja de base, que contiene toda la información acerca de las funciones de correlación de la cuerda topológica:

$$\langle \psi_{\text{top}} | \lambda^{-1}, x \rangle_{(t, \bar{t})} = \psi_{\text{top}}(\lambda^{-1}, x; t, \bar{t}) \quad (4.134)$$

Es importante señalar aquí que, para poder hacer la identificación exacta entre las ecuaciones de variación de los estados comprimidos con respecto a la estructura compleja de base y las ecuaciones de la anomalía holomorfa es crucial el haber definido los estados comprimidos según la relación (4.71), es decir, de tal manera que tengan dependencia holomorfa en (x, λ^{-1}) y sean secciones de $\mathcal{L}^{\frac{h+1}{2}} \otimes \kappa_{\mathcal{M}}^{1/2}$.

El segundo paso para el establecimiento de la conexión cuerda topológica/cuantización de H^3 viene de la apreciación [91] de que $|\psi_{\text{top}}\rangle$ es un estado físico del sistema ($\in \mathcal{H}_{\text{phys}}$), esto es, que satisface (4.41). Para demostrarlo, los autores de la ref. [91] trabajan formalmente con un operador $\hat{\gamma}$ que no es necesariamente cerrado, pero que al elegirse una estructura compleja de base puede descomponerse en

$$\hat{\gamma} = \hat{\gamma}^{3,0} \oplus \hat{\gamma}^{2,1} \oplus \hat{\gamma}^{1,2} \oplus \hat{\gamma}^{0,3} \quad (4.135)$$

La forma simpléctica (4.48) implica que $\gamma^{2,1}$ no conmuta con $\gamma^{1,2}$, y lo mismo ocurre entre $\gamma^{3,0}$ y $\gamma^{0,3}$. Con esta descomposición la condición (4.41) se escribe

$$\left(\widehat{\partial\gamma}^{2,1} + \widehat{\bar{\partial}\gamma}^{3,0}\right) |\psi_{\text{phys}}\rangle = 0 \quad (4.136)$$

$$\left(\widehat{\partial\gamma}^{1,2} + \widehat{\bar{\partial}\gamma}^{2,1}\right) |\psi_{\text{phys}}\rangle = 0 \quad (4.137)$$

$$\left(\widehat{\partial\gamma}^{0,3} + \widehat{\bar{\partial}\gamma}^{1,2}\right) |\psi_{\text{phys}}\rangle = 0 \quad (4.138)$$

Nótese que estas tres ligaduras conmutan entre ellas. Esto es algo que ya sabíamos, ya que se trata de ligaduras de primera clase. Éstas implican que podemos obtener el espacio de Hilbert de los estados físicos $\mathcal{H}_{\text{phys}}$ a partir de \mathcal{H}_0 mediante la aplicación, sobre cada estado de \mathcal{H}_0 , del proyector hermítico

$$|\psi_{\text{phys}}\rangle = \hat{\Pi}|\psi_0\rangle \quad (4.139)$$

donde

$$\hat{\Pi} = \int D\Lambda D\sigma Db \exp \int_M \left[\Lambda \wedge \left(\widehat{\partial\gamma}^{2,1} + \widehat{\bar{\partial}\gamma}^{3,0} \right) + \sigma \wedge \left(\widehat{\partial\gamma}^{0,3} + \widehat{\bar{\partial}\gamma}^{1,2} \right) + b \wedge \left(\widehat{\partial\gamma}^{1,2} + \widehat{\bar{\partial}\gamma}^{2,1} \right) \right] \quad (4.140)$$

siendo Λ , σ y b unas $(0,2)$, $(2,0)$ y $(1,1)$ -formas respectivamente. Podemos saber cómo actúa este operador proyección sobre los estados comprimidos $|\hat{\gamma}^{3,0}, \hat{\gamma}^{2,1}\rangle$ si tenemos en cuenta que

$$\hat{\gamma}^{0,3} |\gamma^{3,0}, \gamma^{2,1}\rangle = C_{3,0} \frac{\delta}{\delta \gamma^{3,0}} |\gamma^{3,0}, \gamma^{2,1}\rangle \quad (4.141)$$

$$\hat{\gamma}^{1,2} |\gamma^{3,0}, \gamma^{2,1}\rangle = C_{2,1} \frac{\delta}{\delta \gamma^{2,1}} |\gamma^{3,0}, \gamma^{2,1}\rangle \quad (4.142)$$

$$(4.143)$$

donde $C_{3,0}$ y $C_{2,1}$ son cantidades proporcionales a los conmutadores de $\gamma^{3,0}$ y $\gamma^{2,1}$ con sus hermíticos conjugados. Se obtiene

$$\hat{\Pi} |\gamma^{3,0}, \gamma^{2,1}\rangle = \int D\Lambda D\sigma Db \exp \int_M \left[\Lambda \wedge \left(\widehat{\partial\gamma}^{2,1} + \widehat{\bar{\partial}\gamma}^{3,0} \right) + \bar{\partial}b \wedge \gamma^{2,1} - \frac{C_{2,1}}{2} \bar{\partial}b \partial b \right] |\gamma^{3,0} + C_{3,0} \partial \sigma, \gamma^{2,1} + C_{2,1} \bar{\partial}b - C_{2,1} \bar{\partial} \sigma \rangle \quad (4.144)$$

Ahora $\gamma^{3,0}$ y $\gamma^{2,1}$ no sólo vendrán dadas por las coordenadas de Kähler, sino también por las coordenadas que parametrizan sus partes no armónicas

$$\gamma^{3,0} = \lambda^{-1} \Omega + \partial \chi \quad (4.145)$$

$$\gamma^{2,1} = x^i \mathcal{D}_i \Omega + \partial \xi + \partial^\dagger \tilde{\xi} - \bar{\partial} \chi \quad (4.146)$$

Ahora podemos hacer la integración en Λ

$$\hat{\Pi}|\gamma^{3,0}, \gamma^{2,1}\rangle = \delta(\partial\partial^\dagger\tilde{\xi}) \int D\sigma Db \exp \int_M \left[\bar{\partial}b \wedge \partial\xi - \frac{C_{2,1}}{2} \bar{\partial}b \partial b \right] |\gamma^{3,0} + C_{3,0}\partial\sigma, \gamma^{2,1} + C_{2,1}\partial b - C_{2,1}\bar{\partial}\sigma\rangle \quad (4.147)$$

Operando y haciendo la restricción a las variables físicas (λ^{-1}, x^i) se llega a

$$\hat{\Pi}|\lambda^{-1}, x^i\rangle = \int Db \exp \int_M \left[-\frac{C_{2,1}}{2} \bar{\partial}b \partial b \right] |\lambda^{-1}, x^i + C_{2,1}x_{\partial b}^i\rangle \quad (4.148)$$

donde

$$\partial b = x_{\partial b}^i \mathcal{D}_i \Omega \quad (4.149)$$

Si tomamos como estado particular de \mathcal{H}_0 uno que, hasta orden \hbar^0 , tenga función de onda

$$\langle\psi_0|\lambda^{-1}, x\rangle = (\sqrt{\hbar}\lambda)^{x/24-1} \exp \left[f_1(t) + \frac{\lambda}{6\hbar} C_{ijk}^0(\Omega) x^i x^j x^k \right] \quad (4.150)$$

la función de onda del estado físico correspondiente $\langle\psi_0|\hat{\Pi}|\lambda^{-1}, x\rangle$ es básicamente la función de partición de Kodaira-Spencer. Pero la teoría de Kodaira-Spencer [14] es la teoría de campos de la cuerda (string field theory) para el modelo B. Por tanto,

$$\langle\psi_{\text{phys}}|\lambda^{-1}, x\rangle = e^{f_1(t)} Z_{\text{top}}(\sqrt{\hbar}\lambda, \lambda x) = \langle\psi_{\text{top}}|\lambda^{-1}, x\rangle \quad (4.151)$$

es decir, el estado físico asociado al estado (4.150) es precisamente $|\psi_{\text{top}}\rangle$.

4.6. Polarizaciones holomorfas

En la sección anterior hemos visto que podemos asociar a la función de partición de la cuerda topológica un estado físico $|\psi_{\text{top}}\rangle$ de la cuantización de H^3 . En concreto Z_{top} no es más que su función de onda en polarización de Kähler. Abordamos ahora el problema de hallar cuál es la función de onda de $|\psi_{\text{top}}\rangle$ en polarización real a todos los órdenes en \hbar . Este problema ha sido resuelto por Schwarz y Tang [130] mediante la introducción, como herramienta auxiliar, de una nueva polarización, híbrida, que usa una base para $H^3(M, \mathbb{R})$ que es una mezcla de las bases que se usan en las polarizaciones real y de Kähler. En esta sección clasificamos y describimos las cuatro posibilidades de hacer esta “mezcla”. No existe consenso en la literatura sobre la nomenclatura a utilizar. Por eso es necesario resaltar aquí que en esta tesis reservamos el nombre “holomorfas” o “anti-holomorfas”, dependiendo de cómo sea su dependencia en la estructura compleja de base, para estas polarizaciones híbridas.

La polarización utilizada en la referencia [130] está formada por la base “ (Ω, β) ”:

$$\gamma = \frac{1}{2} x_{\text{hol}}^I \partial_I \Omega + q_{\text{hol}I} \beta^I \quad (4.152)$$

Obsérvese que esta base depende de la 3-forma Ω de background, pero no de $\bar{\Omega}$. De ahí el nombre de “polarización holomorfa”. Asimismo, la elección de esta base también requiere la fijación previa de una base simpléctica. Tomando periodos se obtiene directamente

$$x_{\text{hol}}^I = 2p^I \quad (4.153)$$

$$q_{\text{hol}I} = -i\text{Im}\tau_{IJ}\bar{x}^J \quad (4.154)$$

La regla de cuantización es

$$[q_{\text{hol}I}, x_{\text{hol}}^J] = 2i\hbar\delta_I^J \quad (4.155)$$

De la ec. (4.153) tenemos trivialmente que los estados $|p\rangle$ son también autoestados de \hat{x}_{hol}^I . Por tanto, las funciones de onda en la representación x_{hol} no son más que las funciones de onda en polarización real $\langle\psi|p\rangle$. Sin embargo, la utilidad de introducir (4.152) como una nueva polarización viene del hecho de que se obtiene así un factor de normalización natural distinto para $|x_{\text{hol}}\rangle$ que para $|p\rangle$. En concreto, si escribimos

$$|x_{\text{hol}}\rangle = \exp\left[\frac{i}{2\hbar}x_{\text{hol}}^I\hat{q}_{\text{hol}I}\right]|x_{\text{hol}}=0\rangle \quad (4.156)$$

tenemos

$$|x_{\text{hol}}\rangle = \exp\left[-\frac{i}{2\hbar}p^I\tau_{IJ}p^J\right]|p\rangle \quad (4.157)$$

Las ecuaciones de dependencia en la estructura compleja de base son directas de obtener

$$\frac{\partial}{\partial X^J}|x_{\text{hol}}\rangle = -\frac{i}{8\hbar}C_{IJK}x_{\text{hol}}^Ix_{\text{hol}}^K|x_{\text{hol}}\rangle \quad (4.158)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{X}^J}|x_{\text{hol}}\rangle = 0 \quad (4.159)$$

Podemos también introducir para estos estados la notación del tipo (λ, x^i)

$$\gamma = \lambda_{\text{hol}}^{-1}\Omega + x_{\text{hol}}^i\mathcal{D}_i\Omega + q_{\text{hol}I}\beta^I \quad (4.160)$$

donde

$$\frac{x_{\text{hol}}^I}{2} = \lambda_{\text{hol}}^{-1}X^I + x_{\text{hol}}^i\mathcal{D}_iX^I \quad (4.161)$$

En estas variables “pequeñas” la dependencia en la estructura compleja de base se escribe

$$\frac{\partial}{\partial t^i}|\lambda_{\text{hol}}^{-1}, x_{\text{hol}}^i\rangle = \left[\lambda_{\text{hol}}^{-1}\frac{\partial}{\partial x_{\text{hol}}^i} - \frac{1}{2\hbar}C_{ijk}x_{\text{hol}}^jx_{\text{hol}}^k\right]|\lambda_{\text{hol}}^{-1}, x_{\text{hol}}^i\rangle \quad (4.162)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}^i}|\lambda_{\text{hol}}^{-1}, x_{\text{hol}}^i\rangle = 0 \quad (4.163)$$

La otra posibilidad que ha aparecido en la literatura es [112]

$$\gamma = \frac{1}{2}y^I\bar{\partial}_I\bar{\Omega} + s_I\beta^I \quad (4.164)$$

De nuevo, tomando periodos se tiene

$$y^I = 2p^I \quad (4.165)$$

$$s_I = i\text{Im}\tau_{IJ}x^J \quad (4.166)$$

y, por consiguiente,

$$[s_I, y^J] = 2i\hbar\delta_I^J \quad (4.167)$$

Los autoestados de \hat{y}^I son $|p\rangle$, y los de \hat{s}_I son $|x\rangle$. Se trata, por tanto, de un formalismo que contine tanto las funciones de onda de polarización real como las de Kähler. Teniendo en cuenta el factor de normalización “natural”

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{|\text{Im}\tau|}} \exp\left[\frac{1}{4\hbar}x^I\text{Im}\tau_{IJ}x^J\right] |x\rangle \quad (4.168)$$

la dependencia (anti-holomorfa) en la estructura compleja de base es

$$\frac{\partial}{\partial X^J}|s\rangle = 0 \quad (4.169)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{X}^J}|s\rangle = -\frac{i}{2\hbar}\bar{C}_{IJK}\hat{p}^I\hat{p}^K|s\rangle \quad (4.170)$$

De las ecs. (4.168) y (4.134) se deduce que

$$\langle\psi_{\text{top}}|s\rangle_{\bar{X}} = \exp\left[\frac{i}{4\hbar}x^I\bar{\tau}_{IJ}x^J - \bar{f}_1(\bar{X}) + \sum_{g=0}^{\infty}\hbar^{g-1}F_g\left(\frac{x}{2}, \bar{X}\right)\right] \quad (4.171)$$

De esta ecuación podemos ver que la razón física por la que $\langle\psi_{\text{closed}}|s\rangle_{\bar{X}}$ tiene sólo dependencia anti-holomorfa en el background es porque la dependencia en la parte holomorfa ha sido reabsorbida en el argumento de la función de onda.

Las otras dos posibilidades son

$$\gamma = \frac{1}{2}w^I\bar{\partial}_I\bar{\Omega} + p_{\text{hol}}^I\alpha_I \quad (4.172)$$

para la cual

$$w^I = 2\bar{\tau}^{-1IJ}q_I \quad (4.173)$$

$$p_{\text{hol}}^I = -i\bar{\tau}^{-1IK}\text{Im}\tau_{KL}x^L \quad (4.174)$$

y

$$\gamma = \frac{1}{2}u^I\partial_I\Omega + r^I\alpha_I \quad (4.175)$$

para la cual

$$u^I = 2\tau^{-1IJ}q_J \quad (4.176)$$

$$r^I = i\tau^{-1IK}\text{Im}\tau_{KL}\bar{x}^L \quad (4.177)$$

con lo que no nos aportan nada nuevo interesante.

4.7. El estado “cuerda topológica” en polarización real

La relación entre las bases de la polarización holomorfa (4.152) y la de Kähler es

$$\bar{\partial}_I \bar{\Omega} = \partial_I \Omega - 2i \operatorname{Im} \tau_{IJ} \beta^J \quad (4.178)$$

Esto nos indica que ambas bases coincidirán sólo en el límite donde

$$\frac{i}{2} [(\operatorname{Im} \tau)^{-1}]^{IJ} \partial_J \Omega \quad (4.179)$$

sea pequeño. Tomando periodos obtenemos así las condiciones

$$\frac{i}{2} (\operatorname{Im} \tau)^{-1IJ} \simeq 0 \quad (4.180)$$

$$\frac{i}{2} (\operatorname{Im} \tau)^{-1IK} \tau_{KJ} \simeq 0 \quad (4.181)$$

es decir,

$$\tau_{IJ} + \bar{\tau}_{IJ} \simeq -\tau_{IJ} + \bar{\tau}_{IJ} \rightarrow \pm \infty \quad (4.182)$$

Naturalmente, este límite no se puede satisfacer si uno mantiene \bar{t} el complejo conjugado de t . Una forma de mantener la condición (4.182) es haciendo el límite “holomorfo”:

$$z \rightarrow z_0 \quad (4.183)$$

$$\bar{z} \rightarrow \nu \bar{z}_0 \quad (4.184)$$

con $\nu \rightarrow \infty$, z_0 una constante compleja y las coordenadas (z, \bar{z}) de \mathcal{M} aquellas que dan los parámetros de Kähler en el mirror de M . En otras palabras, estamos manteniendo z fijo, mientras que \bar{z} lo estamos mandando a la región más profunda del cono de Kähler⁵. En este límite

$$\bar{\partial}_I \bar{\Omega} \rightarrow -2i \operatorname{Im} \tau_{IJ} \beta^J \quad (4.185)$$

de tal forma que las coordenadas de Kähler tienden a

$$x^I \rightarrow x_{\text{hol}}^I \quad (4.186)$$

$$-i \operatorname{Im} \tau_{IJ} \bar{x}^J \rightarrow q_{\text{hol}I} \quad (4.187)$$

con lo que los estados $|x^I\rangle$ y $|x_{\text{hol}}^I\rangle$ pasan a ser proporcionales. Con las normalizaciones elegidas en el presente trabajo la constante de proporcionalidad es precisamente 1

$$|x^I\rangle_{X, \bar{X}_\infty} = |x_{\text{hol}}^I\rangle_X \quad (4.188)$$

⁵El modelo B en M es equivalente, por simetría de espejo, al modelo A en la variedad imagen \tilde{M} , en la que los espacios de moduli de estructura compleja y de Kähler están intercambiados. La clase de Kähler de \tilde{M} es una clase de cohomología $\in H^{1,1}(\tilde{M}) \simeq H^{2,1}(M)$, pero la condición de que el volumen de \tilde{M} sea positivo implica que las posibles clases de Kähler están dentro de un cono en $H^{1,1}(\tilde{M})$, denominado cono de Kähler. La condición de estar muy dentro del cono de Kähler es, por tanto, equivalente a que el volumen de \tilde{M} sea muy grande. Denominamos al punto correspondiente en \mathcal{M} al que tiende este límite el “punto del infinito”.

De las ecs. (4.188) y (4.134) se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\text{top}} | \lambda_{\text{hol}}^{-1}, x_{\text{hol}}^i \rangle_X &= \exp \left[f_1(t) + \left(\frac{\chi}{24} - 1 \right) \log \lambda + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{g=0}^{\infty} (\lambda_{\text{hol}} \sqrt{\hbar})^{2g-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} C_{i_1 \dots i_n}^g(t, \bar{t}_{\infty}) (\lambda_{\text{hol}} x_{\text{hol}}^{i_1}) \dots (\lambda_{\text{hol}} x_{\text{hol}}^{i_n}) \right] \end{aligned} \quad (4.189)$$

Obsérvese que esta expresión no contine la energía libre a género 0. Esto se debe a las reglas de selección de los correladores de la cuerda topológica. Como en el límite holomorfo se tiene también que $\partial_i K \propto \frac{1}{\nu} \rightarrow 0$, la relación entre las variables de Kähler y las de espacio de fases “grande” se simplifica

$$\frac{1}{2} x_{\text{hol}}^0 = \lambda_{\text{hol}}^{-1} X^0 \quad (4.190)$$

$$\frac{1}{2} x_{\text{hol}}^{I=i} = X^0 (\lambda_{\text{hol}}^{-1} t^i + x^i) \quad (4.191)$$

donde $t^i = \frac{X^i}{X^0}$. La eq. (4.189) se escribe entonces

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\text{top}} | x_{\text{hol}}^I \rangle_X &= \exp \left[\sum_{g=0}^{\infty} (\lambda_{\text{hol}} \sqrt{\hbar})^{2g-2} F_g \left(\frac{x_{\text{hol}}}{2}, \bar{X}_{\infty} \right) - \right. \\ &\quad - (\lambda_{\text{hol}} \sqrt{\hbar})^{-2} F_0(X) - (\lambda_{\text{hol}} \sqrt{\hbar})^{-2} (\lambda_{\text{hol}} x_{\text{hol}}^i) \partial_i F_0(X) - \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (\lambda_{\text{hol}} \sqrt{\hbar})^{-2} (\lambda_{\text{hol}} x_{\text{hol}}^i) (\lambda_{\text{hol}} x_{\text{hol}}^j) \partial_i \partial_j F_0(X) \right] \end{aligned} \quad (4.192)$$

Nótese que, ya que las cantidades F_g son secciones de \mathcal{L}^{2-2g} , al escribirla en términos de variables grandes $F_g(\frac{x^I}{2}, \bar{X}^I)$ se traducen en funciones homogéneas de grado $2 - 2g$ en x^I . Por otro lado se tiene la relación

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2\hbar} \frac{x_{\text{hol}}^I}{2} \tau_{IJ} \frac{x_{\text{hol}}^J}{2} &= -(\lambda_{\text{hol}} \sqrt{\hbar})^{-2} F_0(X) - (\lambda_{\text{hol}} \sqrt{\hbar})^{-2} (\lambda_{\text{hol}} x_{\text{hol}}^i) \partial_i F_0(X) - \\ &\quad - \frac{1}{2} (\lambda_{\text{hol}} \sqrt{\hbar})^{-2} (\lambda_{\text{hol}} x_{\text{hol}}^i) (\lambda_{\text{hol}} x_{\text{hol}}^j) \partial_i \partial_j F_0(X) \end{aligned} \quad (4.193)$$

Combinando las expresiones (4.157), (4.192) y (4.193) se obtiene como resultado final que el estado “cuerda topológica” en polarización real es

$$\langle \psi_{\text{top}} | p \rangle = \exp \left[\sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{g-1} F_g^{\text{top}}(p, \bar{X}_{\infty}) \right] \quad (4.194)$$

Podemos ahora entender físicamente porqué, en el proceso de paso de la polarización de Kähler a la real se obtiene una función de onda que no depende del background inicial de estructura compleja elegido, sin que por ello se pierda ninguna información sobre las amplitudes de la cuerda topológica. Ya no tenemos dependencia en la estructura compleja de base porque:

- hemos mandado \bar{t} al punto del infinito, y
- pasamos a considerar la dependencia en t como la dependencia funcional $\psi(p)$ de la funcion de onda.

4.8. Polarización no lineal

Dado que estamos considerando que γ pertenece al conjunto de 3-formas en H^3 que pueden descomponerse en suma del elemento de L Ω_γ más su complejo conjugado, tenemos, por tanto, la posibilidad de trabajar también con otro tipo distinto de polarización en la que usamos las ecuaciones del atractor (2.96) para trabajar con operadores $\widehat{CX}^I, \widehat{CF}_I$ tales que

$$p^I = \text{Re} \left(\widehat{CX}^I \right) \quad (4.195)$$

$$q_I = \text{Re} \left(\widehat{CF}_I \right) \quad (4.196)$$

Nótese que se trata de una polarización que no depende de ninguna estructura compleja de base. A su vez, la dependencia en la base simpléctica elegida es trivial, sólo queda reflejada en las variables \widehat{CX}^I , pero no en $\hat{\Omega}_\gamma$. De la relación de conmutación (4.87) se tiene

$$\frac{1}{4} \left[\widehat{CF}_I, \widehat{CX}^J \right] - \text{hc} = i\delta_I^J \hbar \quad (4.197)$$

Si \widehat{CX} y $\widehat{C\bar{X}}$ conmutaran con su conmutador podríamos sacar un τ_{IJ} factor común y escribir

$$\left[\widehat{CX}^I, \widehat{C\bar{X}}^J \right] \simeq 2\hbar \left[\text{Im}\tau(\widehat{CX}) \right]^{-1IJ} \quad (4.198)$$

Sin embargo esta relación no es exacta. No es posible cuantizar la teoría en esta polarización sin tener ambigüedades de orden en los operadores. Si olvidamos estas ambigüedades, la similaridad entre las relaciones (4.198) y (4.83) nos lleva a considerar los estados coherentes

$$\widehat{CX}^I |CX\rangle = CX |CX\rangle \quad (4.199)$$

$$|CX\rangle = \exp \left[\frac{1}{2\hbar} CX^I \text{Im}\tau_{IJ}(CX) \widehat{C\bar{X}}^J \right] |CX=0\rangle \quad (4.200)$$

Podemos aplicar, por tanto, todo el formalismo de la sección 4.3. En particular tenemos

$$\begin{aligned} \langle \bar{C\bar{X}} = 0 | p \rangle &\simeq \sqrt{|\text{Im}\tau(p)|} \exp \left[\frac{i}{2\hbar} p^I \tau_{IJ}(p) p^J \right] \simeq \\ &\simeq \exp \left[\frac{1}{\hbar} F_0^{\text{top}}(p) \right] \end{aligned} \quad (4.201)$$

Por supuesto, el hecho de que hayamos ignorado los problemas de orden de operadores implica que todo este análisis sólo tiene validez semiclásica. Sin embargo, la función de partición de la cuerda topológica está bien definida a todo orden en teoría de perturbaciones. Esto ha llevado a los autores de las referencias [18, 91] a considerar, por lo menos heurísticamente, esta polarización no lineal como una definición independiente del background de la cuerda topológica en la que el estado $|\psi_{\text{top}}\rangle$ no es más que

$$\langle\psi_{\text{top}}| = \langle\bar{C}\bar{X} = 0| \quad (4.202)$$

En esta polarización independiente del background la función de onda asociada a $|\psi_{\text{top}}\rangle$ es una función trivial

$$\psi_{\text{top}}(CX) = \langle\psi_{\text{top}}|CX\rangle = 1 \quad (4.203)$$

4.9. Discusión

En este capítulo hemos visto que la cuantización de H^3 puede ser descrita de forma rigurosa básicamente en términos de dos tipos distintos de polarizaciones: real y de Kähler. Hemos visto también que el proceso de cambio de polarización para ir de la de Kähler a la real es equivalente a tomar un límite holomorfo

$$\langle\psi_{\text{top}}|p\rangle = \exp \left[\sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{g-1} F_g^{\text{top}}(p, \bar{X}_{\infty}) \right] \quad (4.204)$$

en el que

- mandamos la dependencia en \bar{t} al punto del infinito, y
- pasamos a considerar la dependencia en t como la dependencia funcional $\psi(p)$ de la función de onda.

En la línea de la discusión de la sección 3.2 podemos interpretar este límite holomorfo $(t, \bar{t}) \rightarrow (t, \bar{t}_{\infty})$ como que estamos fijando el punto de base de estructura compleja en el infinito. Por tanto, el significado físico podemos asignarle a la polarización real es que describe el modelo B en este punto de base.

Para estudiar el proceso inverso, es decir, el paso de polarización real a la de Kähler, resulta útil utilizar los diagramas de Feynman de la ref. [96]. Tomemos, por simplicidad, la ecuación (4.92) en el caso particular en el que $x^I = 2\lambda^{-1}X^I$. Ya hemos indicado que este es el punto de base particular en el que se verifican las ecuaciones del atractor

$$\begin{aligned} p^I &= \text{Re} [2\lambda^{-1}X^I] \\ q_I &= \text{Re} [2\lambda^{-1}\tau_{IJ}X^J] \end{aligned} \quad (4.205)$$

También hemos señalado que el par (p, q) es el punto del espacio de fases en el que están centrados los estados comprimidos $|x\rangle_{X, \bar{X}}$. Por tanto, estamos estudiando

$$\langle \psi_{\text{top}} | x = 2\lambda^{-1}X \rangle_{X, \bar{X}} = \exp \left[f_1(X) + \sum_{g=2} (\lambda\sqrt{\hbar})^{2g-2} F_g(X, \bar{X}) \right] \quad (4.206)$$

en términos de su correspondiente función de onda en polarización real. Si expandimos la integral de la ec. (4.92) en torno al punto de silla a primer orden

$$p_{\text{cl}} = \lambda^{-1}X \quad (4.207)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\text{top}} | x = 2\lambda^{-1}X \rangle_{X, \bar{X}} &= \\ &= \exp \left[f_1(X) + \sum_{g=2} (\lambda\sqrt{\hbar})^{2g-2} (F_g(X, \bar{X}_\infty) + \Gamma_g((-2i\text{Im}\tau)^{-1}, \partial_{I_1} \dots \partial_{I_n} F_{r < g}(X, \bar{X}_\infty)) \right) \end{aligned} \quad (4.208)$$

donde Γ_g son los mismo diagramas de Feynman que aparecen en la ec. (4.100), pero ahora el propagador toma un valor distinto

$$\check{\Delta}_{IK}(X) = -2i\text{Im}\tau_{IK}(X) \quad (4.209)$$

Nótese que no hay término \hbar^{-1} en la ec. (4.208). Esto se debe a que la evaluación de la integral (4.92) en la aproximación del punto de silla da, a primer orden 1. Además, el término correspondiente a 1-loop

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{2} \log |\text{Im}\tau| \quad (4.210)$$

se cancela con el factor $|\text{Im}\tau|$ que hay enfrente de la integral (4.92). La conclusión que obtenemos de la ec. (4.208) es que la dependencia no holomorfa que tiene $\langle \psi_{\text{top}} | X \rangle_{X, \bar{X}}$ viene completamente del propagador (4.209) de los diagramas de Feynman. Por otro lado, $F_g^{\text{top}}(X, \bar{X}_\infty)$ cambia bajo una transformación simpléctica modular de forma muy específica (4.100), mientras que hemos visto que $\langle \psi_{\text{top}} | X \rangle_{X, \bar{X}}$ es, salvo constante de normalización $|\text{Im}\tau|^{-1/4}$, invariante modular. Estos dos hechos son compatibles debido a que el propagador cambia ante una transformación simpléctica modular de la forma

$$(-2i\text{Im}\tau)^{-1IJ} \rightarrow (\mathcal{C}\tau + \mathcal{D})_K^I (-2i\text{Im}\tau)^{-1KL} (\mathcal{C}\tau + \mathcal{D})_L^J - (\mathcal{C}\tau + \mathcal{D})_L^J \mathcal{C}^{IL} \quad (4.211)$$

de tal manera que esta transformación se cancela con la transformación de $F_g^{\text{top}}(X, \bar{X}_\infty)$.

A modo de conclusión para el capítulo indiquemos que aunque, de acuerdo con la discusión de la sección (3.2), la anomalía holomorfa es una obstrucción para poder identificar cuál es la física en el espacio blanco independiente del background de la cuerda topológica, hay un sentido más sofisticado en el que se mantiene la independencia en el background. En efecto, aunque cada polarización posible en la que describir las amplitudes de la cuerda topológica viene dada en términos de una estructura compleja de base⁶, el hecho de que conozcamos cómo pasar de una polarización a otra nos

⁶Incluso la polarización real, que está construida aparentemente sin tomar ningún punto de base de estructura compleja, describe la teoría en un punto de base concreto, el punto del infinito.

ha llevado a poder definir el estado independiente del background $|\psi_{\text{top}}\rangle$ del espacio de Hilbert abstracto $\mathcal{H}_{\text{phys}}$. Este estado contiene toda la información sobre las amplitudes de la cuerda topológica. No obstante, cuál es el origen de la teoría de campos 7-dimensional de partida, qué significa el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\text{phys}}$ y qué papel juega en él $|\psi_{\text{top}}\rangle$ son preguntas que todavía no sabemos abordar. Todavía hay mucho que decir sobre el problema de la dependencia en el background de las amplitudes de la cuerda topológica. En lo que sigue abordaremos estas cuestiones en dos marcos físicos muy distintos: la relación con los agujeros negros CY y la dualidad de “gran N” de Dijkgraaf-Vafa.

Capítulo 5

Entropía y funciones de distribución cuánticas

Las funciones de distribución cuánticas, aunque introducidas por primera vez por Wigner [82] hace ya más de 70 años, se han convertido en el último cuarto de siglo en una herramienta muy importante en distintos campos de investigación. Constituyen un camino alternativo para formular la mecánica cuántica, independiente de las formulaciones convencionales basadas en espacios de Hilbert o en integrales de camino, pero equivalente a éstas. Dado un estado $|\psi\rangle$ en el que puede encontrarse un sistema cuántico, su función de distribución cuántica asociada $F_{|\psi\rangle}$ es una función de las coordenadas (p, q) del espacio de fases que nos permite calcular el valor esperado de cualquier observable \hat{A} mediante el promedio

$$\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \int dqdp A(p, q) F_{|\psi\rangle}(q, p) \quad (5.1)$$

Aquí $A(q, p)$ es el observable clásico asociado a \hat{A} . Naturalmente, hay muchas formas de asociar una función en el espacio de fases a un operador cuántico dado y esto da lugar a que se pueda asociar a un mismo estado distintas funciones de distribución cuánticas que corresponden a las distintas formas que tenemos de ordenar los operadores (véase apéndice A). La función de distribución más popular es la función de Wigner, que se corresponde con el mapa de Weyl [83].

Por otro lado, en el capítulo 3 hemos visto que la entropía de Bekenstein-Hawking-Wald (3.79) de los agujeros negros CY supersimétricos viene dada en términos de las energías libres a distinto género de la cuerda topológica en ese CY. A su vez en el capítulo 4 hemos estudiado de forma precisa la relación que hay entre la función de partición de la cuerda topológica y cierto estado físico $|\psi_{\text{top}}\rangle$ de la cuantización de H^3 . En esta correspondencia las correcciones en género se corresponden con las correcciones en \hbar . Parece, por tanto, natural preguntarse si S_{BHW} , o alguna de sus generalizaciones como las cojeturas (3.88) o (3.87), tienen una interpretación simple en términos de

la mecánica cuántica de H^3 . Dado que estas entropías son, debido al mecanismo del atractor, funciones sólo de las cargas (p^I, q_I) del agujero negro y que son precisamente estas cantidades (p^I, q_I) las que actúan como coordenadas del espacio de fases H^3 , lo más natural es buscar esta relación en las funciones de distribución cuánticas asociadas a la cuantización de H^3 . Esta es la tarea que nos disponemos a abordar en el presente capítulo.

Un posible camino para esta conexión que estamos buscando viene dado por la relación, propuesta por Ooguri, Vafa y Verlinde (OVV) [18], entre la función de onda “cosmológica” asociada a la geometría del agujero negro en cuantización radial y la cuantización de $H^3(M, \mathbb{R})$. En la sección 5.1 revisamos esta propuesta a la luz de los resultados del capítulo 4. No obstante, veremos que el camino que merece la pena analizar en detalle es otro bien distinto. Éste consiste, en cambio, en relacionar directamente la entropía del agujero negro, via su dependencia en las energías libres de la cuerda topológica, con alguna función de distribución cuántica asociada a $|\psi_{\text{top}}\rangle$. De hecho, en el trabajo original de OSV [10] se sugiere que S_{OSV} está directamente relacionada con la función de Wigner $F_{|\psi_{\text{top}}\rangle}^W(p, q)$ asociada a $|\psi_{\text{top}}\rangle$. Sin embargo:

- debido al principio de indeterminación no es posible interpretar las funciones de distribución cuánticas como verdaderas distribuciones probabilísticas y, de hecho, todavía no está clara la interpretación física que tiene la forma concreta de cada una de ellas. Si la entropía OSV, o la degeneración microscópica exacta, sea cual sea ésta, del agujero negro coincide con una de estas distribuciones esta interpretación física que estamos buscando tiene que estar, necesariamente, íntimamente ligada con la naturaleza de las correcciones OSV (o de las correcciones microscópicas).
- el argumento estándar que lleva de la fórmula (3.88) a una función de Wigner corresponde a un análisis excesivamente superficial. Este argumento se basa en dos pasos. El primero de ellos [10] es una continuación analítica $\phi/2 \rightarrow ip'$ de tal forma que, si nos olvidamos de la dependencia no holomorfa de Z_{top} podemos escribir

$$\Omega_{\text{OSV}}(p, q) := \exp S_{\text{OSV}}(p, q) = \int dp' m Z_{\text{top}}(p - p') \bar{Z}_{\text{top}}(p + p') e^{i\pi q p'} \quad (5.2)$$

El segundo paso consiste en forzar que la expresión obtenida sea invariante simpléctica. Esto implica que $Z_{\text{top}}(p)$ debe transformar de la misma forma que $|p\rangle$, esto es, que ha de identificarse con la función de onda en polarización real. De esta forma la expresión (5.2) se convierte en una función de Wigner. Pero éste no es el camino natural de conectar la conjetura OSV con las funciones de distribución cuánticas. Como hemos visto en el capítulo anterior, la cantidad $Z_{\text{top}}(\lambda^{-1}; t, \bar{t})$ que aparece en (3.88) no es una función de onda en polarización real, sino en

polarización de Kähler. Por tanto, este argumento ignora por completo el significado físico de la dependencia en (t, \bar{t}) como la anchura en el espacio de fases de los estados coherentes comprimidos que sirven de base para esta representación de $|\psi_{\text{top}}\rangle$. Nótese que esta dependencia en \bar{t} es crucial para poder obtener las ecuaciones del atractor corregidas (3.78) de las refs. [76, 77], y para poder obtener, como aproximación de punto de silla de OSV, la entropía de BHW (3.79).

En las secciones 5.2 y 5.3 abordamos esta empresa mediante la definición de un mapa preciso entre los agujeros negros y ciertos estados comprimidos de la cuantización de $H^3(M, \mathbb{R})$. Veremos que se puede representar la entropía de BHW y la función de partición de OSV en términos de una función de distribución cuántica de tipo Husimi/anti-Husimi mixta. Esto da lugar a que se pueda analizar el significado de las correcciones a la entropía desde el punto de vista de la cuantización de $H^3(M, \mathbb{R})$.

5.1. Flujo del atractor cuántico

Volvamos al sistema unidimensional del flujo del atractor del capítulo 2. La métrica extremal (2.51) se escribe en términos de la coordenada w como

$$ds^2 = e^{2U}(dt)^2 - e^{-2U+2w} [(dw)^2 + d\Omega^2] \quad (5.3)$$

Es conveniente realizar el cambio de variables

$$U = \tilde{U} + w \quad (5.4)$$

y hacer una rotación de Wick para trabajar con la correspondiente métrica euclídea

$$ds^2 = e^{2\tilde{U}+2w}(dt)^2 + e^{-2\tilde{U}} [(dw)^2 + d\Omega^2] \quad (5.5)$$

Al hacer esto, podemos interpretar la coordenada radial w como un tiempo euclídeo que nos parametriza la evolución del espacio $M \times S^2 \times S^1$, siendo S^1 la dirección correspondiente al tiempo físico compactificada con condiciones de frontera que preserven supersimetría. Desde este punto de vista la evolución “temporal” del sistema $\tilde{U}(w), z^i(w), \bar{z}^{\bar{i}}(w)$ viene dada por la acción

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} dw e^w \left[\left(\frac{d\tilde{U}}{dw} + 1 \right)^2 + G_{i\bar{j}} \frac{dz^i}{dw} \frac{d\bar{z}^{\bar{j}}}{dw} + e^{2\tilde{U}} V_{BH}(z, \bar{z}, p, q) \right] \quad (5.6)$$

con la ligadura

$$\left(\frac{d\tilde{U}}{dw} + 1 \right)^2 + G_{i\bar{j}} \frac{dz^i}{dw} \frac{d\bar{z}^{\bar{j}}}{dw} - e^{2\tilde{U}} V_{BH}(z, \bar{z}, p, q) = 0 \quad (5.7)$$

Teniendo en cuenta que

$$|\partial_i |Z_{p,q}||^2 = \frac{1}{4} |\mathcal{D}_i Z|^2 \quad (5.8)$$

podemos escribir la acción (5.6) de la forma

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dw e^w \left[\left(\frac{d\tilde{U}}{dw} + 1 - e^{\tilde{U}} |Z_{p,q}| \right)^2 + \left| \frac{dz^i}{dw} + 2e^{\tilde{U}} G^{i\bar{k}} \bar{\partial}_{\bar{k}} |Z_{p,q}| \right|^2 - 2e^{-w} \frac{d}{dw} \left(e^{\tilde{U}+w} |Z_{p,q}| \right) \right] \quad (5.9)$$

El último término es una derivada total, que da

$$e^{\tilde{U}+w} \rightarrow \sqrt{\frac{4\pi}{A}} e^w \rightarrow 0 \quad \text{en } w \rightarrow -\infty \quad (5.10)$$

$$e^{\tilde{U}+w} \rightarrow e^{M\tau} \rightarrow 1 \quad \text{en } w \rightarrow +\infty \quad (5.11)$$

Es conveniente, en vez de trabajar con $\tilde{U}(w)$, $z^i(w)$, $\bar{z}^{\bar{i}}(w)$, usar las variables $CX^I(w)$, $\bar{C}\bar{X}(w)$, donde C viene dado por la ec. (2.88). Escribiendo la acción en estas variables podemos considerar formalmente la integral de camino euclídea entre los “instantes” w_i y w_f

$$\langle i|f \rangle = \int_i^f D[CX] D[\bar{C}\bar{X}] (\text{medida}) \exp \left[-S \left(CX, \bar{C}\bar{X}, \frac{dCX}{dw}, \frac{d\bar{C}\bar{X}}{dw} \right) \right] \quad (5.12)$$

Nótese que se trata de una integral de camino en la aproximación de mini-superspacio en la que los grados de libertad espacio temporales se reducen a $CX^I(w)$, $\bar{C}\bar{X}(w)$. Dado que el tiempo propio es

$$(dT)^2 = R_{S^2}^2 (dw)^2 = -\frac{1}{2} \bar{C}\bar{X}^I \text{Im}\tau_{IJ}(X) CX^J (dw)^2 \quad (5.13)$$

aunque estemos fijando w_i y w_f , estamos integrando el tiempo propio entre los instantes i y f . Esto implica que la integral de camino $\langle i|f \rangle$ va a ser la función de Green asociada al operador

$$\left(\widehat{\frac{dS}{dR_{S^2}}} \right) = \left(\frac{dS}{dR_{S^2}} \right) \left((CX^I)_f, (\bar{C}\bar{X}^I)_f, -\frac{1}{4\hbar} (\text{Im}\tau)_f^{-1IJ} \frac{\partial}{\partial (\bar{C}\bar{X}^J)_f}, -\frac{1}{4\hbar} (\text{Im}\tau)_f^{-1IJ} \frac{\partial}{\partial (CX^J)_f} \right) \quad (5.14)$$

Por tanto, las posibles funciones de onda “cosmológicas” que podemos definir a partir de la integral de camino (5.12) obedecen la ecuación de Wheeler-DeWitt

$$\left(\widehat{\frac{dS}{dR_{S^2}}} \right) \psi(CX, \bar{C}\bar{X}) = 0 \quad (5.15)$$

La idea de OVV [18] consiste en asociar al agujero negro CY de cargas (p^I, q_J) una función de onda “cosmológica” $\psi_{p,q}$. Ésta va a ser en general una función de las variables de mini-superspacio $(CX, \bar{C}\bar{X})$ ya que es el valor de estas variables lo que hay que fijar en los extremos de la integral (5.12). De nuevo es en el caso supersimétrico en el

que podemos tener cierto control, porque es entonces cuando, en cuanto al cálculo de cantidades BPS, la aproximación de mini-superspacio es exacta. Hay que imponer por tanto, como ligaduras, las ecuaciones del flujo del atractor BPS (2.89). Este conjunto de ligaduras actúan, en la cuantización, como

- ligaduras de segunda clase. La cuantización ha de hacerse con corchetes de Dirac, en vez de Poisson, reduciéndose el espacio de fases al parametrizado por el par $(CX^I, \bar{C}\bar{X}^J)$. Se trata, por tanto, de la cuantización de $H^3(M, \mathbb{R})$ en polarización no lineal. Al igual que ocurre en la sección 4.8, la promoción de los corchetes de Dirac a conmutadores da también en este caso lugar a problemas de ordenación de operadores. Ignorando de nuevo estos problemas se obtiene la relación de conmutación (4.198). Las correspondientes funciones de onda de cosmológicas se escriben por tanto

$$\psi_{p,q}(CX) := \langle \psi_{p,q} | CX \rangle \quad (5.16)$$

- ligaduras de primera clase, que imponen que las funciones de onda físicas obedezcan

$$\left(\frac{\partial}{\partial(CX^I)} + \frac{i}{2\hbar} \frac{\partial W_{p,q}(CX)}{\partial(CX^I)} \right) \psi_{p,q}(CX) = 0 \quad (5.17)$$

La condición (5.17) determina totalente $\psi_{p,q}(CX)$ salvo constate de normalización que puede depender de p y q , pero no de CX^I

$$\psi_{p,q}(CX) = (\text{cte})_{p,q} \exp \left[-\frac{i}{2\hbar} W_{p,q}(CX) \right] \quad (5.18)$$

Podemos valernos del formalismo de estados coherentes desarrollado en el capítulo anterior para obtener el estado correspondiente a esta función de onda en términos de $|\psi_{\text{top}}\rangle$. En efecto, si denotamos por $|(CX)_{p,q}\rangle$ el estado “coherente” de polarización no lineal centrado en (p^I, q_J) , es directo obtener

$$\langle (\bar{C}\bar{X})_{p,q} | CX \rangle = \exp \left[+\frac{i}{2\hbar} W_{p,q}(CX) \right] \quad (5.19)$$

Es claro, por tanto, que $\langle \psi_{p,q} | = \langle -(\bar{C}\bar{X})_{p,q} |$. Pero en la sección 4.8 hemos visto que $\langle \psi_{\text{top}} |$ es (4.202) el estado de polarización no lineal centrado en $(0, 0)$. Por tanto,

$$\langle \psi_{p,q} | = \langle \psi_{\text{top}} | \hat{D}(p, q) \quad (5.20)$$

donde

$$\hat{D}(p, q) = e^{\frac{i}{\hbar}(p\hat{q} - q\hat{p})} \quad (5.21)$$

es el operador desplazamiento (unitario) de Weyl. Se trata de un operador que realiza un desplazamiento (p^I, q_J) en el espacio de fases.

Por supuesto, al igual que ocurre en la sección 4.8, el análisis realizado aquí sólo tiene validez semiclásico. Así, por ejemplo, se espera que la ec. (5.18) tenga correcciones a todos los órdenes en \hbar . No obstante, como la función de partición de la cuerda topológica está bien definida a todo orden en teoría de perturbaciones, la ec. (5.20) tiene sentido a todos los órdenes en \hbar y se espera que proporcione todas las correcciones cuánticas a la función de onda “cosmológica” asociada al agujero negro.

5.2. La función de distribución cuántica del agujero negro

Aunque hemos visto que en polarización no lineal no sabemos cómo controlar las correcciones cuánticas, podemos ir más allá de simples análisis semiclásicos si trabajamos con una linearización de ésta: la polarización de Kähler. La construcción que vamos a realizar comienza con la definición de un mapa que asocia, a un agujero negro CY supersimétrico dado de cargas (p^I, q_J) , un estado comprimido $|BH(p, q)\rangle$ de la polarización de Kähler. Intuitivamente $|BH(p, q)\rangle$ es el estado comprimido centrado en el punto (p^I, q_J) y con anchura dada por la estructura compleja en el punto del atractor del agujero negro. Más concretamente, si denotamos como $\Omega_{p,q}^{\text{quan}}/\lambda_{p,q}^{\text{quan}}$ a la solución de las ecuaciones del atractor corregidas para el agujero negro de cargas (p^I, q_J) , definimos un mapa $(p, q) \rightarrow (\tilde{p}, \tilde{q})$ tal que

$$\frac{\Omega_{\tilde{p}, \tilde{q}}}{\lambda_{\tilde{p}, \tilde{q}}} = \frac{\Omega_{p, q}^{\text{quan}}}{\lambda_{p, q}^{\text{quan}}} \quad (5.22)$$

donde $\Omega_{\tilde{p}, \tilde{q}}$ y $\lambda_{\tilde{p}, \tilde{q}}$ son las soluciones de las ecuaciones del atractor clásicas para las cargas (\tilde{p}, \tilde{q}) . Es obvio que $\tilde{p} = p$, pero $\tilde{q} = \tilde{q}(p, q)$ va a ser en general diferente de q . La posición en el eje q del estado comprimido va a estar, por tanto, corregida cuánticamente. Nótese que, si existe solución a las ecuaciones del atractor corregidas para las cargas (p, q) dadas, entonces siempre es posible definir \tilde{q} para estas cargas. El estado coherente que asociamos al agujero negro de cargas (p, q) es aquél que está centrado en (p, \tilde{q}) con estructura compleja de base dada por $\Omega_{p, \tilde{q}}$:

$$BH(p, q) \longrightarrow |x_{p, \tilde{q}, \Omega_{p, \tilde{q}}}^i, \lambda_{p, \tilde{q}, \Omega_{p, \tilde{q}}}^{-1}\rangle_{\Omega_{p, \tilde{q}}, \bar{\Omega}_{p, \tilde{q}}} \quad (5.23)$$

Nótese que, con esta definición,

$$x_{p, \tilde{q}, \Omega_{p, \tilde{q}}}^i = 0 \quad (5.24)$$

Lo primero que hay que resaltar es que, si tomamos el valor $\hbar = 1/\pi$ para la constante de Planck, la entropía de Bekenstein-Hawking (2.99) para el agujero negro de cargas (p, \tilde{q}) viene precisamente dada por la normalización relativa de este estado

coherente con respecto al “vacío” $|0, 0\rangle_{\Omega_{p,\tilde{q}}, \bar{\Omega}_{p,\tilde{q}}}$.

$$\frac{\langle 0, \lambda_{p,\tilde{q},\Omega_{p,\tilde{q}}}^{-1} | 0, \lambda_{p,\tilde{q},\Omega_{p,\tilde{q}}}^{-1} \rangle_{\Omega_{p,\tilde{q}}, \bar{\Omega}_{p,\tilde{q}}}}{\langle 0, \lambda_{0,0,\Omega_{p,\tilde{q}}}^{-1} = 0 | 0, \lambda_{0,0,\Omega_{p,\tilde{q}}}^{-1} = 0 \rangle_{\Omega_{p,\tilde{q}}, \bar{\Omega}_{p,\tilde{q}}}} = \exp \left[-\frac{1}{\hbar} e^{-K(\Omega_{p,\tilde{q}}, \bar{\Omega}_{p,\tilde{q}})} |\lambda_{p,\tilde{q},\Omega_{p,\tilde{q}}}^{-1}|^2 \right] = e^{-S_{\text{BH}}(p,\tilde{q})} \quad (5.25)$$

Naturalmente, la relación que hay entre el punto (p, \tilde{q}) y las coordenadas de Kähler x, λ^{-1} del estado comprimido es puramente clásica, y esta es la razón nada misteriosa por la que somos capaces de reproducir la entropía de Bekenstein-Hawking en términos de estos estados.

Si, por el contrario, lo que queremos es reproducir la entropía de BHW (3.79) necesitamos introducir necesariamente el estado $|\psi_{\text{top}}\rangle$, ya que éste contiene todas las correcciones en género de la energía libre de la cuerda topológica. Además, conocemos de forma exacta cuál es su producto escalar con el estado coherente del agujero negro. Esto da lugar a la expresión

$$S_{\text{BHW}}(p, q) = \log |\langle \psi_{\text{top}} | 0, \lambda_{p,\tilde{q},\Omega_{p,\tilde{q}}}^{-1} \rangle_{\Omega_{p,\tilde{q}}, \bar{\Omega}_{p,\tilde{q}}}|^2 + \frac{\pi}{\lambda_{p,\tilde{q}}^2} F_0(\Omega_{p,\tilde{q}}) + \frac{\pi}{\bar{\lambda}_{p,\tilde{q}}^2} F_0(\bar{\Omega}_{p,\tilde{q}}) + \frac{\pi}{2} q \phi_{p,\tilde{q}} \quad (5.26)$$

Esta representación de la entropía de BHW tiene un significado muy interesante en términos del formalismo de las funciones de distribución cuánticas. Para aclarar este significado necesitamos volver a la discusión acerca de la normalización de los estados coherentes con respecto a $|0, 0\rangle$ de la sección 4.3. Hasta ahora hemos tomado el convenio de definir los estados coherentes mediante la aplicación sobre el estado vacío del operador¹ $e^{\beta \hat{b}^+}$. Los estados comprimidos así definidos tienen dependencia holomorfa en $\beta = (x, \lambda)$, lo que resulta fundamental para poder identificar la anomalía holomorfa con la transformación de Bogolioubov que resulta del cambio de estructura compleja de base (véase sección 4.5). Lo que ganamos por tener dependencia holomorfa en (x, λ) lo perdemos en el hecho de que estos estados no están normalizados con respecto al estado “vacío”. Hay, sin embargo, una forma distinta de definir los estados coherentes que consiste en aplicar sobre el “vacío” el operador desplazamiento de Weyl

$$\hat{D}(\beta)|0\rangle = e^{\beta \hat{b}^+ - \beta^* \hat{b}}|0\rangle \quad (5.27)$$

Los estados coherentes así definidos son

$$|x, \lambda^{-1}\rangle = \exp \left[-\frac{1}{\hbar} e^{-K} \hat{\lambda}^{-1} \lambda^{-1} + \frac{1}{\hbar} e^{-K} x^i \hat{x}^{\bar{j}} G_{i\bar{j}} + \frac{1}{\hbar} e^{-K} \hat{\lambda}^{-1} \bar{\lambda}^{-1} - \frac{1}{\hbar} e^{-K} \hat{x}^i \bar{x}^{\bar{j}} G_{i\bar{j}} \right] |0, 0\rangle \quad (5.28)$$

Nótese que ahora no son holomorfos con respecto a (x, λ^{-1}) , pero están normalizados con respecto al “vacío”

$$\mathbb{I} = \int d\mu_{x,\lambda^{-1}} |x, \lambda^{-1}\rangle \langle \bar{x}, \bar{\lambda}^{-1}| \quad (5.29)$$

¹en la notación estándar del formalismo de estados comprimidos (véase apéndice A).

$$\frac{\langle \bar{x}', \bar{\lambda}^{-1'} | x, \lambda^{-1} \rangle}{\langle \bar{0}, \bar{0} | 0, 0 \rangle} = \exp \left[-\frac{1}{\hbar} e^{-K} \bar{\lambda}^{-1'} \lambda^{-1} + \frac{1}{\hbar} e^{-K} x^i \bar{x}^{\bar{j}'} G_{i\bar{j}} \right]. \quad (5.30)$$

$$\cdot \exp \left[+\frac{1}{2\hbar} e^{-K} \bar{\lambda}^{-1} \lambda^{-1} - \frac{1}{2\hbar} e^{-K} x^i \bar{x}^{\bar{j}} G_{i\bar{j}} \right]. \quad (5.31)$$

$$\cdot \exp \left[+\frac{1}{2\hbar} e^{-K} \bar{\lambda}^{-1'} \lambda^{-1'} - \frac{1}{2\hbar} e^{-K} x^{i'} \bar{x}^{\bar{j}'} G_{i'\bar{j}'} \right] \quad (5.32)$$

Para distinguirlos de los anteriores vamos a denotar estos estados con la coletilla “good”. El punto principal es que, si pasamos de los estados mal normalizados a los “good”, podemos absorber la contribución F_0 en la ec. (5.26). Como

$$S_{\text{BH}}(p, \tilde{q}) = \frac{\pi}{\lambda_{p,\tilde{q}}^2} F_0(\Omega_{p,\tilde{q}}) + \frac{\pi}{\bar{\lambda}_{p,\tilde{q}}^2} F_0(\bar{\Omega}_{p,\tilde{q}}) + \frac{\pi}{2} \tilde{q} \phi_{p,\tilde{q}} \quad (5.33)$$

el resultado al que se llega es

$$e^{S_{\text{BHW}}(p,q)} = |\langle \psi_{\text{top}} | 0, \lambda_{p,\tilde{q},\Omega_{p,q}^{\text{quan}}}^{-1} \rangle_{\Omega_{p,q}^{\text{quan}}, \bar{\Omega}_{p,q}^{\text{quan}} \text{ good}}|^2 \exp \frac{\pi}{2} (q - \tilde{q}) \phi_{p,q}^{\text{quan}} \quad (5.34)$$

En esta representación la entropía de BHW es básicamente la convolución del estado $|\psi_{\text{top}}\rangle$ con el estado comprimido del agujero negro, centrado en $p, \tilde{q}(p, q)$, donde recordamos que las anchuras de éste último, y los parametros de deformación (squeezing parameters), vienen dados por τ_{IJ} evaluado en el punto del atractor corregido.

Nótese que la ec. (5.34) que hemos obtenido era parte de lo que estábamos buscando: una forma de expresar la entropía del agujero negro en términos de amplitudes en la cuantización de H^3 . Si tenemos además en cuenta el resultado (5.20) de la sección anterior, es decir, que podemos considerar el estado $\langle \psi_{\text{top}} |$ desplazado en el espacio de fases como el estado “cosmológico” supersimétrico de la cuantización radial, encontramos una interpretación interesante para la ec. (5.34). Reordenando, se tiene

$$e^{S_{\text{BHW}}(p,q)} = \langle \psi_{p,q} | \left[|0, 0\rangle_{\Omega_{p,q}^{\text{quan}}, \bar{\Omega}_{p,q}^{\text{quan}}} \exp \left(\frac{\pi}{2} (q - \tilde{q}) \phi_{p,q}^{\text{quan}} \right) \langle 0, 0 |_{\Omega_{p,q}^{\text{quan}}, \bar{\Omega}_{p,q}^{\text{quan}}} \right] | \psi_{p,q} \rangle \quad (5.35)$$

Dado que la geometría AdS_2 de cerca del horizonte, en el euclídeo, y con el tiempo global compactificado, puede mapearse conformemente a un cilindro, podemos entender la ec. (5.35) como una dualidad análoga a la dualidad cuerda abierta/cuerda cerrada de la fig. 1.1.2. En efecto, el lado derecho, análogo al canal de cuerda cerrada, puede identificarse via la ec. (5.20) como una amplitud en cuantización radial donde cada una de las dos fronteras del cilindro tiene asociado el estado $|\psi_{p,q}\rangle$. En cambio, el lado izquierdo, análogo al canal de cuerda abierta, se identifica, via el origen microscópico de S_{BHW} , con una traza en el espacio de Hilbert de cuantización temporal. La diferencia con la figura 1.1.2 es que esta dualidad tiene lugar en el espacio blanco, no en la hoja de mundo.

El otro resultado que estábamos buscando era poder expresar la entropía en términos de una función de distribución cuántica asociada a $\langle \psi_{\text{top}} |$. Esto lo podemos hacer

si denominamos al módulo al cuadrado que aparece en la ec. (5.34) la “función de distribución cuántica del agujero negro”. La escribimos como

$$F_{|\psi_{\text{top}}\rangle}^{\text{BH}}(p, \tilde{q}; \Omega_{p, \tilde{q}}, \bar{\Omega}_{p, \tilde{q}}) = |\langle \psi_{\text{top}} | \lambda_{p, \tilde{q}; \Omega_{p, \tilde{q}}}^{-1}, 0 \rangle_{\Omega_{p, \tilde{q}}, \bar{\Omega}_{p, \tilde{q}} \text{good}}|^2 \quad (5.36)$$

donde recordamos que $\Omega_{p, \tilde{q}} = \Omega_{p, q}^{\text{quan}}$ es el punto del atractor corregido. Para mostrar que se trata de una verdadera función de distribución cuántica y poner de manifiesto su significado vamos a introducir dos funciones delta

$$F_{|\psi_{\text{top}}\rangle}^{\text{BH}} = \int d\mu_{x', \lambda^{-1'}} \delta(x') \delta(\lambda^{-1'} - \lambda_{p, \tilde{q}; \Omega_{p, \tilde{q}}}^{-1}) |\langle \psi_{\text{top}} | \lambda^{-1'}, x' \rangle_{\Omega_{p, \tilde{q}}, \bar{\Omega}_{p, \tilde{q}} \text{good}}|^2 \quad (5.37)$$

Si usamos la siguiente expresión para estas deltas

$$\delta(x') = \int d\mu_{x''} \exp \left[\frac{1}{\hbar} e^{-K} G_{i\bar{j}} x^{i''} \bar{x}^{\bar{j}'} - \frac{1}{\hbar} e^{-K} G_{i\bar{j}} x^{i'} \bar{x}^{\bar{j}''} \right] \quad (5.38)$$

$$\delta(\lambda^{-1'}) = \int d\mu_{\lambda^{-1''}} \exp \left[\frac{1}{\hbar} e^{-K} \lambda^{-1''} \bar{\lambda}^{-1'} - \frac{1}{\hbar} e^{-K} \lambda^{-1'} \bar{\lambda}^{-1''} \right] \quad (5.39)$$

donde K y $G_{i\bar{j}}$ están evaluadas en $\Omega_{p, \tilde{q}}$, obtenemos

$$\begin{aligned} F_{|\psi_{\text{top}}\rangle}^{\text{BH}} &= \int d\mu_{x'', \lambda^{-1''}} d\mu_{x', \lambda^{-1'}} |\langle \psi_{\text{top}} | \lambda^{-1'}, x' \rangle_{\Omega_{p, \tilde{q}}, \bar{\Omega}_{p, \tilde{q}} \text{good}}|^2 \\ &\exp \left[\frac{1}{\hbar} e^{-K} \lambda^{-1''} \bar{\lambda}^{-1'} + \frac{1}{\hbar} e^{-K} G_{i\bar{j}} x^{i''} \bar{x}^{\bar{j}'} - \frac{1}{\hbar} e^{-K} \lambda^{-1'} \bar{\lambda}^{-1''} - \frac{1}{\hbar} e^{-K} G_{i\bar{j}} x^{i'} \bar{x}^{\bar{j}''} \right] \\ &\exp \left[-\frac{1}{\hbar} e^{-K} \lambda^{-1''} \bar{\lambda}_{p, \tilde{q}; \Omega_{p, \tilde{q}}}^{-1} + \frac{1}{\hbar} e^{-K} \lambda_{p, \tilde{q}; \Omega_{p, \tilde{q}}}^{-1} \bar{\lambda}^{-1''} \right] \end{aligned} \quad (5.40)$$

Dado que $|\lambda^{-1'}, x'\rangle$ es un autoestado de $\hat{\lambda}^{-1}, \hat{x}^i$

$$\begin{aligned} F_{|\psi_{\text{top}}\rangle}^{\text{BH}} &= \int d\mu_{x'', \lambda^{-1''}} d\mu_{x', \lambda^{-1'}} \langle \psi_{\text{top}} | e^{-\frac{1}{\hbar} e^{-K} \hat{\lambda}^{-1} \bar{\lambda}^{-1''} - \frac{1}{\hbar} e^{-K} G_{i\bar{j}} \hat{x}^i \bar{x}^{\bar{j}''}} | \lambda^{-1'}, x' \rangle_{X_{p, \tilde{q}}, \bar{X}_{p, \tilde{q}} \text{good}} \\ &\langle \lambda^{-1'}, x' | e^{\frac{1}{\hbar} e^{-K} \lambda^{-1''} \hat{\lambda}^{-1} + \frac{1}{\hbar} e^{-K} G_{i\bar{j}} x^{i''} \hat{x}^{\bar{j}}} | \psi_{\text{top}} \rangle_{\Omega_{p, \tilde{q}}, \bar{\Omega}_{p, \tilde{q}} \text{good}} \\ &\exp \left[-\frac{1}{\hbar} e^{-K} \lambda^{-1''} \bar{\lambda}_{p, \tilde{q}; \Omega_{p, \tilde{q}}}^{-1} + \frac{1}{\hbar} e^{-K} \lambda_{p, \tilde{q}; \Omega_{p, \tilde{q}}}^{-1} \bar{\lambda}^{-1''} \right] \end{aligned} \quad (5.41)$$

Finalmente usamos las expresiones (5.29) y (5.24) y obtenemos

$$\begin{aligned} F_{|\psi_{\text{top}}\rangle}^{\text{BH}} &= \int d\mu_{x'', \lambda^{-1''}} \langle \psi_{\text{top}} | e^{-\frac{1}{\hbar} e^{-K} \hat{\lambda}^{-1} \bar{\lambda}^{-1''} - \frac{1}{\hbar} e^{-K} G_{i\bar{j}} \hat{x}^i \bar{x}^{\bar{j}''}} e^{\frac{1}{\hbar} e^{-K} \lambda^{-1''} \hat{\lambda}^{-1} + \frac{1}{\hbar} e^{-K} G_{i\bar{j}} x^{i''} \hat{x}^{\bar{j}}} | \psi_{\text{top}} \rangle \\ &\exp \left[\frac{1}{\hbar} e^{-K} \lambda_{p, \tilde{q}; \Omega_{p, \tilde{q}}}^{-1} \bar{\lambda}^{-1''} + \frac{1}{\hbar} e^{-K} G_{i\bar{j}} x_{p, \tilde{q}; \Omega_{p, \tilde{q}}}^i \bar{x}^{\bar{j}''} - \frac{1}{\hbar} e^{-K} \lambda^{-1''} \bar{\lambda}_{p, \tilde{q}; \Omega_{p, \tilde{q}}}^{-1} - \frac{1}{\hbar} e^{-K} G_{i\bar{j}} x^{i''} \bar{x}_{p, \tilde{q}; \Omega_{p, \tilde{q}}}^{\bar{j}} \right] \end{aligned}$$

En esta expresión se observa explícitamente (véase la fórmula (A.24)) que la función de distribución del agujero negro corresponde a una función de distribución cuántica en la que el mapa $A(p, q) \rightarrow \hat{A}(\hat{p}, \hat{q})$ se hace con una regla de orden de operadores en la

que $\hat{\lambda}^{-1}$ y \hat{x}^i se sitúan delante de sus adjuntos. Como $\hat{\lambda}^{-1}$ es un operador de creación, mientras que \hat{x}^i son operadores de aniquilación, se trata, por tanto, de un orden “normal” con respecto al sector λ^{-1} , pero antinormal con respecto al sector x^i . En otra palabras, la función de distribución del agujero negro es una función de Husimi/anti-Husimi mixta² asociada al estado $|\psi_{\text{top}}\rangle$. Para un estado dado hay toda una familia de funciones de distribución cuánticas de Husimi o anti-Husimi asociadas, parametrizada por los parámetros de resolución. En este caso, el parámetro de resolución que corresponde a la función de distribución del agujero negro viene dado por τ_{IJ} evaluado en el punto del atractor corregido. Nótese también que, para llevar a cabo esta derivación, ha sido crucial el hecho de que hemos trabajado con estados comprimidos correctamente normalizados con respecto a $|0,0\rangle$.

En conclusión, hemos expresado la entropía de BHW como una función de distribución de Husimi/anti-Husimi mixta en H^3 . En la próxima sección aplicamos este resultado para estudiar el significado físico de la generalización de BHW que proponen OSV.

5.3. OSV en términos de la cuantización de H^3 . Significado físico

Como hemos explicado en la sección 3.5, el punto de vista que adoptamos en el presente trabajo (conjetura OSV) consiste en interpretar la entropía de BHW como la transformada de Legendre de la energía libre $\log Z_{\text{BH}}(p, \phi)$ asociada a un colectivo mixto. La correspondiente función de partición Z_{BH} viene entonces dada (3.90) por el cuadrado de la función de partición de la cuerda topológica. Es, por tanto, $|\exp F_{\text{top}}|^2$ la que tiene, de forma natural, interpretación microscópica como cierta traza en el espacio de estados de la cuantización temporal del sistema. Se hace, por tanto, necesario reescribir la dualidad “open/closed” (5.35) en términos de esta cantidad, mejor que de $\exp S_{\text{BHW}}$. Utiizando los mismos razonamientos de la sección anterior se tiene

$$\begin{aligned} Z_{\text{BH}}(p, \phi) &= |\langle \psi_{\text{top}} | 0, \lambda_{p, q_\phi, \Omega}^{-1} \rangle_{\Omega, \bar{\Omega}_{\text{good}}}|^2 \exp -\frac{\pi}{2} q_\phi \phi = \\ &= F_{|\psi_{\text{top}}\rangle}^{\text{BH}} \left(p, q_\phi; X = p + i\frac{\phi}{2}, \bar{X} = p - i\frac{\phi}{2} \right) \exp \left[+\pi \frac{\phi^I}{2} \text{Im} \tau_{IJ} \frac{\phi^J}{2} - \frac{\pi}{2} \phi^I \text{Re} \tau_{IJ} p^J \right] \end{aligned} \quad (5.42)$$

donde $q_\phi = -\text{Im} \tau \frac{\phi}{2} + \text{Re} \tau p$ es la carga asociada, mediante las ecuaciones del atractor clásicas (2.98), a $X = p + i\frac{\phi}{2}$. Podemos escribir también

$$-\frac{\pi}{2} q_\phi \phi = +\pi q_\phi (\text{Im} \tau)^{-1} (q_\phi - \text{Re} \tau p) \quad (5.43)$$

²En el apéndice A pueden verse las definiciones y propiedades de las funciones de Husimi, anti-Husimi y Wigner.

La conclusión es, por tanto, que la función de partición mixta de OSV viene dada básicamente por la función de Husimi/anti-Husimi asociada a $|\psi_{\text{top}}\rangle$, con anchura dada por (p, ϕ) , multiplicada por la exponencial del cuadrado de la carga clásica q_ϕ asociada a (p, ϕ) . Pasando al colectivo microcanónico, se tiene la siguiente expresión para el número de microestados compatibles

$$\begin{aligned}\Omega(p, q) &= \int d\phi m |\langle \psi_{\text{top}} | 0, \lambda_{p, q_\phi, \Omega}^{-1} \rangle_{\Omega, \bar{\Omega}_{\text{good}}} |^2 \exp \frac{\pi}{2} (q - q_\phi) \phi = \\ &= \int d\phi m F_{|\psi_{\text{top}}\rangle}^{\text{BH}} \left(p, q_\phi; X = p + i\frac{\phi}{2}, \bar{X} = p - i\frac{\phi}{2} \right) \exp \left[\pi \frac{\phi}{2} \text{Im}\tau \frac{\phi}{2} + \pi \frac{\phi}{2} (q - \text{Re}\tau p) \right]\end{aligned}\quad (5.44)$$

Si usamos la reacción inversa entre los dos colectivos podemos escribir la función de distribución del agujero negro en términos de $\Omega(p, q)$

$$F_{|\psi_{\text{top}}\rangle}^{\text{BH}}(p, q_\phi; X, \bar{X}) = \int dq' \Omega(p, q') \exp \left[+\pi (q' - q_\phi) (\text{Im}\tau)^{-1} (q_\phi - \text{Re}\tau p) \right] \quad (5.45)$$

Nótese que la representación integral (5.45) de F^{BH} que hemos obtenido es una consecuencia directa de la conjetura OSV (3.90) y que puede usarse como una forma alternativa de establecerla. Sin embargo, sólo el significado mecano-cuántico de la función de distribución del agujero negro ya conduce de por sí, sin la necesidad en invocar un colectivo mixto para el agujero negro, a una representación integral de F^{BH} en términos de la función de distribución de Wigner asociada a $|\psi_{\text{top}}\rangle$. Esta otra representación integral tiene, por tanto, un origen totalmente diferente del de la que se deriva de la conjetura OSV. Sin embargo, vamos a ver que, en cierto límite, ambas representaciones coinciden.

La expresión que nos permite relacionar $F_{|\psi_{\text{top}}\rangle}^{\text{BH}}$ con la función de Wigner³ $F_{|\psi_{\text{top}}\rangle}^W(p, q)$ es⁴

$$\begin{aligned}F_{|\psi_{\text{top}}\rangle}^{\text{BH}}(p, q_\phi; X, \bar{X}) &= \int dp' dq' F_{|\psi_{\text{top}}\rangle}^W(p', q') \\ &\exp \left[-\pi ((q_\phi - q') - \text{Re}\tau(p - p')) (\text{Im}\tau)^{-1} ((q_\phi - q') - \text{Re}\tau(p - p')) \right. \\ &\quad \left. -\pi(p - p') \text{Im}\tau(p - p') \right]\end{aligned}\quad (5.46)$$

Podemos ahora comparar esta representación integral con la que se deriva de OSV. Trabajando por simplicidad en el caso en el que $\text{Re}\tau = 0$, se tiene

$$\begin{aligned}F_{|\psi_{\text{top}}\rangle}^{\text{BH}} &= \int dp' dq' F_{|\psi_{\text{top}}\rangle}^W(p', q') \exp \left[-\pi (q_\phi - q') (\text{Im}\tau)^{-1} (q_\phi - q') - \pi(p - p') \text{Im}\tau(p - p') \right] \\ F_{|\psi_{\text{top}}\rangle}^{\text{BH}} &= \int dq' \Omega(p, q') \exp \left[-\pi (q_\phi - q') (\text{Im}\tau)^{-1} q_\phi \right]\end{aligned}\quad (5.47)$$

³Esta es precisamente la función de Wigner que se conjetura [91, 113, 114] que es igual a la función de partición de la teoría de Hitchin V_H [115]. De hecho, si definimos lo que sería equivalente a la función de Husimi/anti-Husimi mixta en polarización no lineal $F_{|\psi_{\text{top}}\rangle}^{nl}(p, q)$ y usamos que $\psi_{\text{top}}(CX) = 1$, obtenemos que la expresión que da $F_{|\psi_{\text{top}}\rangle}^W(p, q)$ en términos de $F_{|\psi_{\text{top}}\rangle}^{nl}(p, q)$ no es más que la función de partición de la teoría de Hitchin. Esta expresión puede obtenerse fácilmente si insertamos $\mathbb{I} = \int d\mu_{X, \bar{X}} |X\rangle\langle X|$ en (A.28). Esta conjetura ha sido estudiada a orden de 1-lazo en [116].

⁴Véase apéndice A

En general ambas relaciones son distintas, lo que muestra que la degeneración de estados que postula OSV $\Omega(p, q)$ no es una función de Wigner, sino un objeto de naturaleza muy diferente. Sin embargo, si el agujero negro es tal que el punto del atractor está localizado en una región “en el infinito” en el que

$$\tau \rightarrow i\infty \quad (5.48)$$

ambas expresiones coinciden. Puede verse que esta región está dentro de la región en la que $(X, \bar{X}) \simeq (X_\infty, \bar{X}_\infty)$ ⁵. Nótese que tanto $F_{|\psi_{top}\rangle}^W(p, q)$ como $\Omega(p, q)$ son funciones que no dependen de ningún background, pero sólo $\Omega(p, q)$ tiene el significado estadístico de degeneración microscópica de estados.

Es bien sabido que la información que contiene cada una de las funciones de distribución cuánticas asociadas a un mismo estado es equivalente a la que contiene la función de onda, de tal forma que elegir una distribución u otra es una cuestión de conveniencia. Por ejemplo, aunque la función de Wigner comparte con las verdaderas funciones de distribución la propiedad

$$|\psi(p)|^2 = \int dq F_{|\psi\rangle}^W(p, q) \quad (5.49)$$

falla en no ser definido-positiva. De hecho, oscila rápidamente en las regiones del espacio de fases que quedan fuera de la trayectoria clásica del sistema [139]. Por otro lado, en el caso en el que lo que interesa son las densidades semiclásicas de probabilidad en el espacio de fases resulta más conveniente usar las distribuciones de Husimi. Esto se debe a que este tipo de distribuciones, aunque no poseen la propiedad (5.49), se obtienen a partir de la función de Wigner haciendo, en cada punto (p, q) , un promedio del valor de F^W en los alrededores de (p, q) , de tal forma que el resultado siempre es positivo. Este promedio se hace de tal forma que el peso de cada punto viene dado por el valor de ciertas gaussianas⁶. De hecho, la función de Wigner también se puede obtener a partir de las funciones de anti-Husimi haciendo precisamente este mismo promedio. Como todas las funciones de distribución contienen, desde el punto de vista de la mecánica cuántica, la misma información, podríamos considerar que esta información perdida en este promedio no tiene significado físico.

No obstante, el punto de vista expresado en el párrafo anterior corresponde con el hecho de considerar, en cada caso, el núcleo de la función de distribución adecuado. Como se explica en el apéndice A, el núcleo de la función de distribución (A.21) es trivial sólo en el caso de la función de Wigner, pero da lugar a medidas no triviales residuales para todas las demás funciones de distribución, incluyendo la de Husimi.

⁵De hecho, las derivaciones microscópicas [80, 88, 89, 110] que se han hecho hasta la fecha de la conjetura OSV suponen precisamente el caso en el que la estructura compleja del horizonte está en esta región del infinito. Éste es el motivo por el que encuentran una relación entre la degeneración microscópica y la energía libre topológica en la que no aparecen las correcciones no holomorfas.

⁶Las anchuras de estas gaussianas son precisamente las que definen los estados comprimidos.

Esto implica que, si nos empeñamos en mantener de forma forzosa el mapa de Weyl, la expresión integral que da los valores medios de las observables queda revestida por estos factores de conversión, de tal manera que ya no podemos interpretar las funciones como F^H como funciones de distribución. El ignorar estos factores en el cálculo de los valores medios da lugar a que se pierda información cuántica. Se estaría haciendo una aproximación de “punto grueso” en el espacio de fases. Este es el punto de vista con el que se puede dar sentido físico al promedio descrito en el párrafo anterior.

En todo caso, en el problema que nos preocupa, hemos escrito la entropía de BHW en términos de una función de distribución de Husimi/anti-Husimi mixta. Por tanto, esta entropía contiene, en el sector λ^{-1} información que ha sido promediada en la función de Wigner, mientras que la función de Wigner contiene, en el sector x , información “extra”, que está promediada en F^{BH} . No obstante, dado que el objeto

$$\langle \psi_{\text{top}} | \lambda^{-1}, x \rangle = \psi_{\text{top}}(\lambda^{-1}, x) \quad (5.50)$$

tiene setido en el espacio de Hilbert que hemos considerado, nuestra función de Husimi/anti-Husimi es positiva. En conclusión, en cierto sentido, la función de Wigner, y $\Omega(p, q)$ en la región $\tau \rightarrow i\infty$, contiene menos información en el sector λ^{-1} que la contenida en la entropía de BHW, pero información extra⁷ en el sector x . Es esta información extra la que aporta la conjetura OSV, acerca de la degeneración de microestados y al menos en la región $\tau \rightarrow i\infty$, y que no está contenida en la fórmula de BHW.

⁷Nótese que, de los resultados de la sección 4.7 se obtiene que en la región $(X_{p,\bar{q}}, \bar{X}_{p,\bar{q}}) \sim (X_\infty, \bar{X}_\infty)$ nuestra función de Husimi/anti-Husimi mixta se vuelve prácticamente independiente de q y se aproxima mucho a $|\langle \psi_{\text{top}} | p \rangle|^2$. Por otro lado, la función de Wigner no necesita de ningún punto de base para ser definida. Por tanto, en esta región, lo que calcula la función de distribución del agujero negro es la suma (5.49) de los valores que toma la función de Wigner en los distintos valores de q para un p dado.

Capítulo 6

Dualidad de “gran N ” como un cambio de polarización

Hasta ahora hemos considerado sólo cuerdas topológicas cerradas. No obstante, es posible formular los modelos A y B para cuerdas topológicas abiertas [119, 120] mediante la imposición de condiciones para los campos de la hoja de mundo $\Sigma_{g,h}$ en la frontera $\partial\Sigma_{g,h}$ que preserven la simetría BRST de la teoría. En concreto, para el modelo B esto se traduce en condiciones de frontera tipo Dirichlet para los ϕ^μ correspondientes a ciertas direcciones, y Neumann en las restantes, que hacen que las cuerdas abiertas estén ancladas en ciclos holomorfos de M . En este caso “topológico” es útil trabajar con la descripción de la dinámica de estas cuerdas abiertas que da la teoría de campos de la cuerda (“string field theory”, SFT). Esto se debe a que en este caso, al contrario de lo que ocurre en las supercuerdas, la teoría de campos de las cuerdas abiertas es, exactamente, una teoría gauge tratable y, en algunos casos, muy sencilla. Hemos visto en el capítulo 3 que para el modelo B el límite clásico es exacto, con lo que los modos en los que ϕ^μ no es constante a lo largo de la cuerda desacoplan. Esto implica, por ejemplo, que, en el caso de que el ciclo holomorfo donde están enrolladas las branas sea todo el CY, la “string field theory” de las cuerdas abiertas se reduzca simplemente a una “field theory” con acción

$$S = \frac{1}{2g_s} \int_M \Omega \wedge \text{Tr} \left(A \wedge \bar{\partial} A + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) \quad (6.1)$$

donde denotamos aquí por g_s el acoplo de la cuerda topológica y A es la parte $(0, 1)$ de la conexión gauge sobre la brana. En el caso de que tengamos N branas, A está evaluada en el álgebra de Lie asociada al grupo $U(N)$.

Asímismo, hasta ahora también hemos considerado sólo el caso en el que el espacio blanco de la cuerda topológica M es compacto. Sin embargo, también es posible definir la teoría de cuerdas topológicas en variedades no compactas. Nos referimos a las denominadas “variedades Calabi-Yau locales”, que son variedades de Kähler no

compactas con $c_1 = 0$. La idea es que se trata de modelos locales de variedades que verdaderamente son CY. No obstante, en los últimos años se han hecho importantes progresos en el estudio de los modelos A y B en CY locales [121, 122] sin la necesidad de tratar estas variedades como límites de variedades compactas. Aunque los CY locales también están dotados con una 3-forma holomorfa Ω , el hecho de que contengan ciclos no compactos hace que no sea tan directo generalizar para éstos la geometría especial que aparece en el caso compacto.

Como hemos señalado en la introducción, además de la interpretación de la función de partición de la cuerda topológica cerrada como función de onda, otra lección importante que se ha aprendido acerca de las cuerdas topológicas es que hay una dualidad de gran N [15, 16], asociada a cierto tipo de transiciones geométricas, que relaciona un background de cuerda abierta con otro distinto de cuerda cerrada. Ésta nos permite calcular las amplitudes de la cuerda topológica cerrada para algunos espacios blanco concretos. Ya hemos indicado que las transiciones geométricas que aparecen en estas dualidades recuerdan a la que se da en la correspondencia AdS/CFT y, de hecho, ambas, son dualidades de “gran N ” en el sentido de la propuesta de ’t Hooft.

En este capítulo estudiamos concretamente la propuesta de Dijkgraaf y Vafa [17]. Se trata de una propuesta bien conocida entre la comunidad¹. El objetivo del presente capítulo es ver qué nuevos conocimientos podemos obtener de lo aprendido acerca de la naturaleza de Z_{top} como función de onda en este escenario.

El punto de partida es el CY local resuelto M_{res} que viene descrito por la ecuación

$$[W'(x)]^2 + v^2 + w^2 + z^2 = 0 \quad (x, v, w, z) \in \mathbb{C}^4 \quad (6.2)$$

donde $W(x)$ es un polinomio complejo de grado $d+1$ con puntos críticos no degenerados. Sin pérdida de generalidad podemos considerar que el coeficiente de orden más alto de $W'(x)$ es 1, de forma que

$$W'(x) = \prod_{a=1}^d (x - x_a) \quad (6.3)$$

En el abierto $W'(x) \neq iz$ podemos definir las coordenadas locales

$$\zeta := \frac{v + iw}{W'(x) - iz} \quad (6.4)$$

$$\Phi_0 := x \quad (6.5)$$

$$\Phi_1 := \frac{1}{2}(v - iw) \quad (6.6)$$

mientras que en $v \neq iw$ podemos definir

$$\zeta' := \frac{W'(x) - iz}{v + iw} \quad (6.7)$$

¹Una buena introducción a este tema la encontramos en la ref. [123].

$$\Phi'_0 := x \quad (6.8)$$

$$\Phi'_1 := \frac{1}{2}(v + iw) \quad (6.9)$$

Las reglas de transición en el solapamiento de ambos abiertos son

$$\zeta' = \frac{1}{\zeta} \quad (6.10)$$

$$\Phi'_0 = \Phi_0 \quad (6.11)$$

$$\Phi'_1 = \zeta^2 \Phi_1 + W'(\Phi_0) \zeta \quad (6.12)$$

Podemos ver que en la posición

$$x = x_a \quad ; \quad v = w = z = 0 \quad (6.13)$$

la geometría se reduce a una 2-esfera, que etiquetamos como \mathbb{CP}_a^1 , con $a = 1, \dots, d$, para la que ζ y ζ' son las coordenadas proyectivas. Dijkgraaf y Vafa hallaron que, en el caso de que haya N_a B-branas enrolladas en cada \mathbb{CP}_a^1 , la SFT asociada a las cuerdas abiertas ancladas a estas branas se reduce a un modelo de matrices para una matriz holomorfa M de tamaño $N \times N$, siendo $N = \sum_{a=1}^d N_a$. M es el campo de Higgs que da las posiciones, en la dirección $\Phi_0 = x$ de las branas². Por tanto, transforma en la adjunta del grupo gauge $U(N)$. La función de partición de este modelo de matrices es

$$Z_{\text{MM}}(g_s, N) = \mathcal{N}(N) \int \mathcal{D}M \exp \left[-\frac{1}{g_s} \text{Tr } W(M) \right] \quad (6.14)$$

donde \mathcal{N} es una constante de normalización y $\mathcal{D}M = \wedge_{m,n} dM_{mn}$ (en orden lexicográfico). Puede verse que W juega el papel de potencial para este modelo de matrices, mientras que g_s juega el papel de constante de Planck. De esta forma, la función de partición de las cuerdas topológicas abiertas se puede escribir como la expansión de 't Hooft perturbativa del modelo de matrices sobre un vacío en el que hay N_a autovalores en torno al punto crítico x_a ,

$$Z_{\text{open}}(g_s, N_a) = \exp \left(\sum_{g=0}^{\infty} g_s^{2g-2} \sum_{h_1, \dots, h_d=1}^{\infty} F_{g, h_1, h_2, \dots, h_d} t_1^{h_1} t_2^{h_2} \dots t_d^{h_d} \right) \quad (6.15)$$

donde $t_a = g_s N_a$ son los acoplos de 't Hooft.

La conjetura de Dijkgraaf-Vafa establece que la resumación de 't Hooft de las energías libres

$$F_g^{\text{open}}(t) = \sum_{h_1, \dots, h_d=1}^{\infty} F_{g, h_1, h_2, \dots, h_d} t_1^{h_1} t_2^{h_2} \dots t_d^{h_d} \quad (6.16)$$

²El otro campo de Higgs Φ_1 y el potencial gauge que vive en la 2-esfera actúan como multiplicadores de Lagrange y fuerzan la condición $\Phi_0 = \text{cte}$ en toda la 2-esfera, de tal forma que la teoría se vuelve 0-dimensional.

es igual a las energías libres de la cuerda topológica cerrada $F_g^{\text{closed}}(t)$ en una variedad distinta M_{def} , que es un CY deformado según la curva espectral del modelo de matrices. Es decir,

$$F_g^{\text{open}}(t) = F_g^{\text{closed}}(t) \quad (6.17)$$

donde las cantidades t^a s en el lado cerrado se identifican con los parámetros de deformación de la estructura compleja de M_{def} . En la sección 6.1 revisamos cómo surge esta propuesta de la observación de que es posible obtener toda la información acerca de la geometría especial de M_{def} a partir del modelo de matrices a “gran N ”.

Pero si vamos más allá del límite de “gran N ” el primer problema que surge al echar un primer vistazo a la relación (6.17) viene de notar que $F_g^{\text{open}}(t)$ son, de forma natural, funciones holomorfas, mientras que hemos visto que $F_g^{\text{closed}}(t, \bar{t})$, con $g > 0$, tienen una dependencia no-holomorfa dada por las ecuaciones de la anomalía holomorfa. Se sabe que la solución a este problema viene de especificar que la cantidad que aparece en el lado derecho en la eq. (6.17) es realmente el límite holomorfo³ de F_g^{closed} . Para obtener la F_g^{closed} completa habría que introducir estas energías libres holomorfas a mano en las ecuaciones de la anomalía holomorfa. En un trabajo reciente Eynard, Mariño y Orantin [129] encaran esta cuestión y muestran que hay un procedimiento para obtener las energías libres no holomorfas $F_g^{\text{open}}(t, \bar{t})$ directamente del modelo de matrices y que éstas satisfacen exactamente las ecuaciones de la anomalía holomorfa.

En la sección 6.2 aplicamos los resultados del capítulo 4 para estudiar cómo podemos entender la conjetura (6.17) en la cuantización de H^3 . Veremos que los resultados de la ref. [129] se amoldan de forma natural a la cuantización de H^3 . Esto nos va a permitir asociar también a las cuerdas topológicas abiertas un estado cuántico, formular la conjetura de Dijkgraaf-Vafa de una forma independiente del background y obtener una visión geométrica del cambio de polarización de real a Kähler como una dualidad cuerdas abiertas/cuerdas cerradas (sección 6.3).

Por último, en la sección 6.4 estudiamos el caso en el que se introducen branas no compactas en el escenario anterior.

6.1. Dualidad de Dijkgraaf-Vafa

En esta sección describimos algunos aspectos del modelo holomorfo de una matriz definido en la eq. (6.14) que van a ser relevantes en la discusión del resto del capítulo. Para una revisión más completa y detallada remitimos al lector a las refs. [123–125].

Ante la transformación $M \rightarrow SMS^{-1}$, con S una matriz $U(N)$, tanto $\text{Tr } W(M)$

³El límite en el que enviamos \bar{t} al punto del infinito, mientras que t lo mantenemos finito (véase sección 4.7).

como la medida $\mathcal{D}M$ son invariantes. Fijando el gauge de tal manera que M sea diagonal con autovalores complejos λ_m , $m = 1, \dots, N$ mediante el procedimiento habitual de Fadeev-Popov y fijando la constante de normalización de forma adecuada se llega a

$$Z_{\text{MM}}(g_s, N) = \frac{1}{N!} \int d\lambda_1 \dots \int d\lambda_N \exp \left[-N^2 S(\lambda_m; g_s, N) \right] \quad (6.18)$$

con

$$S(\lambda_m; g_s, N) := \frac{1}{g_s N^2} \sum_{m=1}^N W(\lambda_m) - \frac{1}{N^2} \sum_{m \neq n} \log(\lambda_m - \lambda_n) \quad (6.19)$$

Las propiedades de convergencia de $Z_{\text{MM}}(g_s, N)$ dependen del camino de integración $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ para los autovalores. Denotamos este camino por $\lambda(s)$, con $s \in \mathbb{R}$, de forma que los distintos autovalores están localizados en $\lambda(s_m)$. El operador densidad espectral $\rho(s, s_m)$ se define como

$$\rho(s, s_m) := \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \delta(s - s_m) \quad (6.20)$$

Es claro que se trata de una función real y que normaliza de la forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(s, s_m) ds = 1 \quad (6.21)$$

En términos de este operador podemos escribir

$$Z_{\text{MM}}(g_s, N) = \frac{1}{N!} \int_{\mathbb{R}} ds_1 \dots \int_{\mathbb{R}} ds_N \exp \left[-N^2 S_{\text{eff}}(s_m; g_s, N) \right] \quad (6.22)$$

con

$$S_{\text{eff}}(s_m; g_s, N) := \int ds \rho(s, s_m) \left[\frac{1}{t} W(\lambda(s)) - \frac{1}{N} \log(\lambda'(s)) - \mathcal{P} \int ds' \rho(s', s_m) \log(\lambda(s) - \lambda(s')) \right] \quad (6.23)$$

Nótese que se trata de una función compleja de las variables reales s_m . El valor medio de un operador $h(\lambda(s_m))$ se define como

$$\langle h(\lambda(s_m)) \rangle = \frac{1}{Z_{\text{MM}}(g_s, N)} \frac{1}{N!} \int_{\mathbb{R}} ds_1 \dots \int_{\mathbb{R}} ds_N h(\lambda(s_m)) \exp \left[-N^2 S_{\text{eff}}(s_m; g_s, N) \right] \quad (6.24)$$

Los operadores del tipo $h(\lambda(s_m)) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N f_h(\lambda(s_m))$ también pueden escribirse en términos de la densidad espectral

$$h(\lambda(s_m)) = \int ds \rho(s, s_m) f_h(\lambda(s)) \quad (6.25)$$

De particular importancia es la traza normalizada del resolvente

$$w(s_m; x) := \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \frac{1}{x - \lambda(s_m)} = \int ds \rho(s, s_m) \frac{1}{x - \lambda(s)} \quad (6.26)$$

A partir de la igualdad

$$\int_{\gamma} d\lambda_1 \dots \int_{\gamma} d\lambda_N \sum_{m=1}^N \frac{\partial}{\partial \lambda_m} \left[\prod_{l \neq m} (\lambda_l - \lambda_m) \exp \left(-\frac{1}{g_s} \sum_{k=1}^N W(\lambda_k) \right) \frac{1}{x - \lambda_m} \right] = 0 \quad (6.27)$$

se deduce la “ecuación de lazos”

$$\langle w(s_m; x)^2 \rangle - \frac{1}{t} W'(x) \langle w(s_m; x) \rangle - \frac{1}{4t} \langle f(s_m; x) \rangle = 0 \quad (6.28)$$

donde $t = g_s N$ es el parámetro de 't Hooft y

$$f(s_m; x) := -\frac{4t}{N} \sum_{m=1}^N \frac{W'(x) - W'(\lambda(s_m))}{x - \lambda(s_m)} = -4t \int ds \rho(s, s_m) \frac{W'(x) - W'(\lambda(s))}{x - \lambda(s)} \quad (6.29)$$

Para que Z_{MM} y $\langle h(\lambda(s_m)) \rangle$ converjan es necesario que γ tienda asintóticamente en sus dos extremos a algunas de las regiones angulares

$$\mathcal{A}_k : \quad \theta = \frac{\alpha}{d+1} + 2\pi \frac{k}{d+1}; \quad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \quad (6.30)$$

con $k = 0, 1, \dots, d$. Por holomorfía, tanto la función de partición como los valores medios de operadores holomorfos no dependen del camino de integración γ concreto, sólo de los sectores asintóticos (k, l) al que pertenece. Asimismo, los valores que toman para (k, l) , (l, k) y $(k+p, l+p)$ están relacionados por factores multiplicativos que sólo dependen de N y que pueden ser reabsorbidos en la constante de normalización. Por tanto, se puede considerar con toda generalidad sólo los sectores $(a, 0)$, con $a = 1, \dots, d$. No obstante, en lo que estamos interesados es en la expansión de “gran N ” del modelo de matrices. Ésta no es más que la expansión de las integrales en torno al “punto de silla” que constituye la solución a las ecuaciones de movimiento

$$\frac{1}{t} W'(\lambda(s_m)) = \frac{2}{N} \sum_{n=1 \atop (n \neq m)}^N \frac{1}{\lambda(s_m) - \lambda(s_n)} + \frac{1}{N} \frac{\lambda''(s_m)}{[\lambda'(s_m)]^2} \quad (6.31)$$

El último término es un término de curvatura despreciable a gran N . En esta ecuación se observa que, si bien el término de la izquierda hace que los autovalores tiendan a agruparse en torno a los puntos críticos, el primer término de la derecha es una repulsión logarítmica entre los autovalores proporcional al parámetro de 't Hooft t . Por tanto, a gran N la solución a esta ecuación implica que los autovalores van a formar una distribución continua con valor distinto de cero cerca de los puntos críticos, formando segmentos \mathcal{C}_a , que aquí denominamos “cortes”, de tamaño mayor cuanto mayor sea t . Si bien la función de partición y los correladores son independientes de qué camino de integración elijamos dentro de cada sector, la existencia de soluciones a las ecs. (6.31) impone restricciones en cómo debe ser el camino γ concreto. Por ejemplo, para t pequeño γ debe pasar por todos los puntos críticos x_a y, además, con dirección

tangente dada por la fase de $W''(x_a)$. En la correspondiente solución los autovalores están distribuidos en las inmediaciones de x_a a lo largo de los segmentos rectos dados por esas pendientes. Para parámetro de 't Hooft no pequeño estas restricciones son más complicadas y los autovalores en la solución de las ecs.(6.31) están distribuidos en segmentos curvos que no tienen necesariamente por qué pasar por x_a . En resumidas cuentas, para poder hacer la expansión en torno al punto de silla hay que trabajar necesariamente con un camino γ que satisfaga todas éstas restricciones. En particular tomamos un camino $\tilde{\gamma}_{(p_1,0)}$ formado por distintas componentes

$$\tilde{\gamma}_{(p_1,0)} = \gamma_{(p_1,p_2)} \cup \gamma_{(p_2,p_3)} \cup \dots \cup \gamma_{(p_d,0)} \quad (6.32)$$

tal que cada una de las d componentes pasa cerca de cada uno de los d puntos críticos x_a . La expansión de “gran N ” para los valores medios de la densidad espectral y de la traza del resolvente es

$$\langle \rho(s, s_m) \rangle = \sum_g^{\infty} N^{-2g} \rho_g(s) \quad (6.33)$$

$$\langle w(s_m; x) \rangle = \sum_g^{\infty} N^{-2g} w_g(x) \quad (6.34)$$

$\rho_0(s)$ es precisamente el valor que toma $\rho(s, s_m)$ si evaluamos los s_m en la solución de las ecuaciones de movimiento⁴. De ésto y de la relación

$$w_0(x) = \int ds \frac{\rho_0(s)}{x - \lambda(s)} \quad (6.35)$$

se tiene que $w_0(x)$ es analítica en todo \mathbb{C} salvo en los cortes \mathcal{C}_a y que $\rho_0(s)$ viene dada precisamente por la discontinuidad de $w_0(x)$ a través de los cortes

$$\rho_0(s) = \lambda'(s) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} [w_0(\lambda(s) - i\epsilon\lambda'(s)) - w_0(\lambda(s) + i\epsilon\lambda'(s))] \quad (6.36)$$

En principio, $\rho_0(s)$ puede calcularse de la ecuación de movimiento a gran N

$$\frac{1}{t} W'(\lambda(s)) = 2\mathcal{P} \int ds' \frac{\rho_0(s')}{\lambda(s) - \lambda(s')} \quad (6.37)$$

En este límite de gran N la ecuación de lazos se reduce a

$$[w_0(x)]^2 - \frac{1}{t} W'(x) w_0(x) - \frac{1}{4t^2} f_0(x) = 0 \quad (6.38)$$

donde

$$f_0(x) = -4t \int ds \rho_0(s) \frac{W'(x) - W'(\lambda(s))}{x - \lambda(s)} \quad (6.39)$$

⁴Es, por tanto, real.

es un polinomio de grado $d - 1$, de coeficientes en general complejos, cuyo coeficiente de orden más alto es $-4t$.

Un aspecto importante a remarcar es que los modelos de matrices como el que estamos considerando pueden describirse en distintos “colectivos”. Esto puede hacerse separando el plano complejo x en dominios D_a que no intersecan de forma que cada componente $\gamma_{p_a, p_{a+1}}$ está contenida enteramente dentro de D_a , e introduciendo los operadores

$$S_a(s_m) = t \int_{\partial D_a} \frac{dx}{2\pi i} w(s_m; x) \quad (6.40)$$

que corresponden a la fracción de autovalores que están dentro de D_a , multiplicada por t . Es claro que no todos ellos son independientes, teniéndose la relación

$$\sum_{s=1}^d S_a(s_m) = t \quad (6.41)$$

Denotamos a las fracciones independientes por S^I , con $I = 1, \dots, d - 1$. La función de partición de gran canónico del modelo de matrices se define como

$$Z_{GC}(g_s, N, J_I) = \frac{1}{N!} \int_{\gamma} d\lambda_1 \dots \int_{\gamma} d\lambda_N \exp \left[-N^2 S(\lambda_m; g_s, N) - \frac{1}{g_s^2} \sum_{I=1}^{d-1} J_I S^I(s_m) \right] \quad (6.42)$$

Las cantidades J_I hacen de potenciales para las S^I . Obsérvese que $Z_{MM}(g_s, N) = Z_{GC}(g_s, N, J = 0)$. Con el camino elegido (6.32) podemos hacer la siguiente descomposición en las integrales

$$\int_{\tilde{\gamma}_{(p_1, 0)}} d\lambda_m = \sum_{a=1}^d \int_{\gamma_{(p_a, p_{a+1})}} d\lambda_m \quad (6.43)$$

de forma que

$$Z_{GC}(g_s, N, J_I) = \sum_{N_1, \dots, N_{d-1}=0}^N Z_{MI}(g_s, N, S^I) \exp \left[-\frac{1}{g_s^2} \sum_{I=1}^{d-1} J_I S^I \right] \quad (6.44)$$

donde la suma en N_I se hace de tal forma que $\sum_{I=1}^{d-1} N_I \leq N$, y donde

$$Z_{MI}(g_s, N, S^I) = \frac{1}{N_1! \dots N_d!} \int_{\gamma_{(p_1, p_1)}} d\lambda_1^{(1)} \dots \int_{\gamma_{(p_1, p_1)}} d\lambda_{N_1}^{(1)} \dots \int_{\gamma_{(p_d, 0)}} d\lambda_1^{(d)} \dots \int_{\gamma_{(p_d, 0)}} d\lambda_{N_d}^{(d)} \exp \left[-N^2 S(\lambda_m^{(a)}; g_s, N) \right] \quad (6.45)$$

es la función de partición de microcanónico. Nótese que Z_{MI} puede interpretarse como la función de partición de un modelo de muchas matrices $M^{(a)}$ con interacción entre ellas. Es precisamente esta función la que nos da la función de partición de las cuerdas

topológicas abiertas ancladas en los $\mathbb{C}P_a^1$. Por este motivo también lo escribimos como Z_{open} . Su expansión de “gran N” es

$$F_{\text{open}}(g_s, t, S^I) := \log Z_{\text{open}}(g_s, t, S^I) = \sum_{g=0}^{\infty} g_s^{2g-2} F_g^{\text{open}}(t, S^I) \quad (6.46)$$

Como cada $\gamma_{(p_a, p_{a+1})}$ va de un sector convergente a otro, el punto de silla en torno al cual hacemos la expansión de “gran N” es dominante. Además, una vez fijados los N_a hay sólo una única solución $\rho_0(s; t, S^I)$ a las ecuaciones de gran N (6.35), (6.37) y (6.38) salvo permutación de los autovalores que están dentro de un mismo dominio. El factor de permutación cancela precisamente el término $(N_1! \dots N_d!)^{-1}$. Por tanto, la energía libre a gran N es

$$F_0^{\text{open}}(t, S^I) = t^2 \mathcal{P} \int ds \int ds' \log [\lambda(s) - \lambda(s')] \rho_0(s; t, S^I) \rho_0(s'; t, S^I) - t \int ds W(\lambda(s)) \rho_0(s; t, S^I) \quad (6.47)$$

Nótese además que, en el límite en el que es válido hacer la expansión de “gran N”, se pueden sustituir las sumas en N_I por integrales, de tal forma que

$$Z_{\text{GC}}(g_s, t, J_I) = \int_0^t dS^1 \dots \int_0^t dS^{d-1} \int_0^t dS_d \delta \left(\sum_{a=1}^d S_a - t \right) Z_{\text{MI}}(g_s, t, S^I) \exp \left[-\frac{1}{g_s^2} \sum_{I=1}^{d-1} J_I S^I \right] \quad (6.48)$$

En el límite de gran N podemos aproximar a orden más bajo estas integrales por el valor del integrando en el punto de silla. De aquí se obtiene que las energías libres planares de ambos colectivos están relacionadas por una transformada de Legendre

$$F_0^{\text{GC}}(t, J_I) = F_0^{\text{open}}(t, S^I) - \sum_{I=1}^{d-1} J_I S^I \quad (6.49)$$

donde S^I es la solución de

$$\frac{\partial F_0^{\text{open}}(t, S^I)}{\partial S^I} = J_I \quad (6.50)$$

Estamos ahora en condiciones de ver en detalle por qué a partir la expansión de “gran N” del modelo de matrices podemos realizar explícitamente la idea de 't Hooft. Si definimos la función

$$y_0(x) := W'(x) - 2tw_0(x) \quad (6.51)$$

podemos ver de la ec. (6.38) que $y_0(x)$ es la rama $y_0(x) = +\sqrt{[W'(x)]^2 + f_0(x)}$ de la superficie de Riemann hiperelíptica de género $\hat{g} = d - 1$

$$\hat{\Sigma}_{d-1} : y^2 = [W'(x)]^2 + f_0(x) \quad (6.52)$$

Se trata de un recubrimiento de dos hojas sobre el plano complejo x donde las dos hojas están conectadas a través de los cortes \mathcal{C}_a (véase figura 6.1). Esto da lugar a que se pueda definir el CY local deformado M_{def} mediante

$$[W'(x)]^2 + f_0(x) + v^2 + w^2 + z^2 = 0 \quad (x, v, w, z) \in \mathbb{C}^4 \quad (6.53)$$

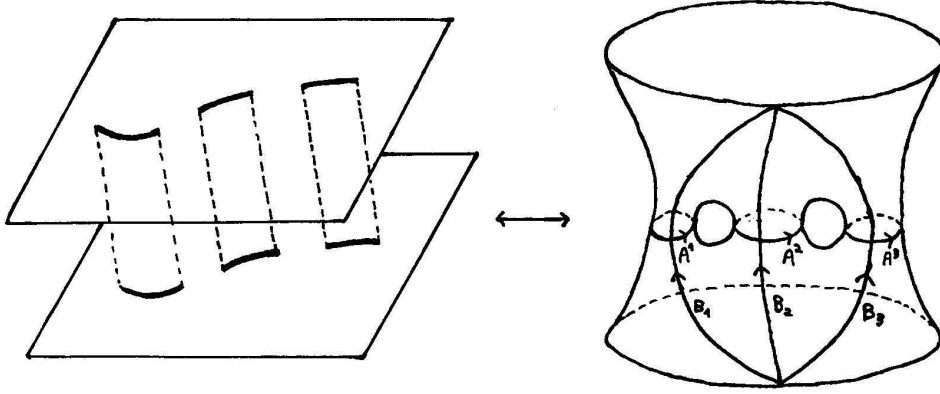


Figura 6.1: Superficie de Riemann $y^2 = [W'(x)]^2 + f_0(x)$ para el caso $d = 3$, y su base de ciclos (A^a, B_b) .

M_{def} está dotado de una $(3, 0)$ -forma holomorfa Ω que en coordenadas (v, w, x) se escribe

$$\Omega = \frac{dv \wedge dw \wedge dx}{2z(v, w, x)} \quad (6.54)$$

y puede entenderse como un recubrimiento sobre $\hat{\Sigma}_{d-1}$ donde la fibra es una S^2 que, debido a que

$$\int_{S^2} \Omega = -2\pi i y(x) dx \quad (6.55)$$

colapsa a cero en los extremos de los cortes \mathcal{C}_a . Los 3-ciclos de M_{def} pueden entenderse, por tanto, como recubrimientos con fibra S^2 sobre segmentos en el plano x (en una de las dos ramas). En concreto, si denotamos por A^a los segmentos correspondientes a los cortes, y por B_a los segmentos que van desde los extremos superiores de los cortes hasta el infinito, los 3-ciclos resultantes, que denotamos con las mismas letras A^a y B_a , son compactos en el primer caso, y no compactos en el segundo. Los números de intersección son

$$\#(A^a, A^b) = 0 \quad (6.56)$$

$$\#(B_a, B_b) = 0 \quad (6.57)$$

$$\#(A^a, B_b) = \delta_b^a \quad (6.58)$$

A los segmentos A^a y B_a también podemos asociarles 1-ciclos en $\hat{\Sigma}_{d-1}$ (ver figura 6.1) que, de nuevo, y abusando de la notación, denotamos de la misma manera A^a y B_a . Estos 1-ciclos forman una base simpléctica de la homología relativa $H_1(\hat{\Sigma}_{d-1}, \{Q, Q'\})$, siendo Q y Q' los puntos del infinito de las dos ramas. Usando la ec. (6.55) podemos

escribir las integrales de Ω en los 3-ciclos como integrales de la 1-forma $-i\pi y dx$ mero-morfa en $\hat{\Sigma}_{d-1}$ en los correspondientes 1-ciclos. Denotamos a esta 1-forma también como Ω , de manera que

$$\int_{3\text{-ciclo}} \Omega = \int_{1\text{-ciclo}} \Omega \quad (6.59)$$

Si, por otro lado, definimos

$$\phi(s) := W(\lambda(s)) - 2t\mathcal{P} \int ds' \log [\lambda(s) - \lambda(s')] \rho_0(s'; t, S^I) \quad (6.60)$$

entonces es directo encontrar que

$$\frac{d\phi(s)}{ds} = \begin{cases} \lambda'(s)y_0(\lambda(s)) & \text{si } \lambda(s) \notin \bigcup_a \mathcal{C}_a \\ 0 & \text{si } \lambda(s) \in \bigcup_a \mathcal{C}_a \end{cases} \quad (6.61)$$

Por tanto, $\phi(s)$ toma en los cortes valores constantes ξ_a de forma que la diferencia entre estos valores para dos cortes contiguos es

$$\xi_{I+1} - \xi_I = \frac{i}{2\pi} \left(\int_{B_I} \Omega - \int_{B_{I+1}} \Omega \right) \quad (6.62)$$

Como además

$$\frac{\partial F_0^{\text{open}}(t, S^I)}{\partial S^I} = -t \int_{\gamma^{-1}(\bigcup_a \mathcal{C}_a)} ds \frac{\partial \rho_0(s; t, S^I)}{\partial S^I} \phi(s) = \xi_d - \xi_I \quad (6.63)$$

se observa que es útil trabajar con la base de ciclos

$$A_o^I := \sum_{a=1}^I A^a \quad (6.64)$$

$$B_{oI} := B_I - B_{I+1} \quad (6.65)$$

$$\hat{A} := \sum_{a=1}^d A^a \quad (6.66)$$

$$\hat{B} := B_d \quad (6.67)$$

Nótese que todos ellos son compactos salvo \hat{B} y que los números de intersección son

$$\#(A_o^I, B_{oJ}) = \delta_J^I \quad (6.68)$$

$$\#(\hat{A}, \hat{B}) = 1 \quad (6.69)$$

$$(\text{Resto de intersecciones}) = 0 \quad (6.70)$$

En efecto, con esta nueva base de ciclos tenemos

$$X^I := \int_{A_o^I} \Omega = 4\pi^2 \sum_{J=1}^I S^J \quad (6.71)$$

$$F_I := \int_{B_{oI}} \Omega = -8\pi^3 i \frac{\partial F_0^{\text{open}}}{\partial X^I}$$

$$\hat{X} := \int_{\hat{A}} \Omega = 4\pi^2 t$$

$$\int_{\hat{B}} \Omega = -8\pi^3 i \frac{\partial F_0^{\text{open}}}{\partial \hat{X}} - 2\pi i \left[W(\Lambda_0) - 2t\mathcal{P} \int ds' \log (\Lambda_0 - \lambda(s')) \rho_0(s'; t, S^I) \right]$$

Obsérvese que las dos primeras ecuaciones son las ecuaciones de geometría especial rígida para M_{def} , donde la función que juega el papel de prepotencial es F_0^{open} y donde las cantidades X^I juegan el papel de coordenadas especiales (moduli de estructura compleja) de M_{def} . La cantidad Λ_0 que aparece en la última ecuación es un cut-off introducido para regularizar la integral, que es divergente debido al carácter no compacto de \hat{B} . No obstante, hay que remarcar que F_0^{open} es finita e independiente de ningún cut-off.

Aunque gran cantidad de las sutilezas descritas en esta sección referentes al camino de integración, los cortes, los ciclos, etc... no estaban claras en un principio, la intuición de que efectivamente el modelo de matrices contenía la geometría especial de M_{def} llevó a Dijkgraaf y Vafa [17] a conjeturar que la expansión de “gran N ” del modelo de matrices es exactamente la expansión de género de la energía libre de la cuerda topológica cerrada en M_{def} . Teniendo en cuenta ahora todos los detalles, podemos escribir esta conjetura como

$$F_g^{\text{open}}(\hat{X}, X^I) = F_g^{\text{closed}}(\hat{X}, X^I, \bar{\hat{X}}_\infty, \bar{X}_\infty^I) \quad (6.72)$$

Podemos encontrar diversos tests de la conjetura en las refs. [126–128].

6.2. Función de partición geométrica como un estado cuántico

Procedamos ahora a estudiar el lado cerrado de la dualidad de Dijkgraaf-Vafa desde el punto de vista de la cuantización de H^3 . Debido a que M_{def} es un CY local, no podemos aplicar directamente los resultados del capítulo 4. Es necesario tener en cuenta algunas sutilezas relacionadas con el carácter no compacto de M_{def} .

Las relaciones de geometría especial para M_{def} vienen dadas por las ecs. (6.71). En este caso de CY local, el prepotencial F_0^{open} no es una función homogénea de grado 2. No obstante, es posible calcular de forma precisa cómo se desvía del carácter homogéneo

$$\sum_{I=1}^{d-1} X^I \frac{\partial F_0^{\text{open}}(t, S^J)}{\partial X^I} + \hat{X} \frac{\partial F_0^{\text{open}}(t, S^J)}{\partial \hat{X}} = 2F_0^{\text{open}}(t, S^J) + t \int ds \rho(s; t, S^J) W(\lambda(s)) \quad (6.73)$$

Las dos primeras ecuaciones de (6.71), que corresponden al sector puramente compacto, son propiamente relaciones de geometría espacial rígida. Las cantidades X^I son propiamente moduli de estructura compleja de M_{def} . En cambio, debido a que el ciclo \hat{B} es no compacto, no podemos considerar la dirección dada por las variaciones de \hat{X} como parte del espacio de moduli de estructura compleja \mathcal{M} de M_{def} . Vamos a tratar, por consiguiente, a la cantidad \hat{X} como un parámetro en vez de como un modulus. \mathcal{M}

tiene, por tanto, dimensión compleja $d - 1$. Por supuesto, si entendemos M_{def} como un límite local de un verdadero CY, entonces el correspondiente espacio de moduli sería más grande e incluiría las variaciones de \hat{X} , y el prepotencial será homogéneo.

Aclarado esto tenemos que discutir un punto importante. No sólo el modelo holomorfo de una matriz es capaz de reproducir, a gran N , la geometría deformada M_{def} con prepotencial F_0^{open} , sino que, además, existe un “teorema de reconstrucción” [124] debido a Lazaroiu, que afirma que dado un CY local M_{def} , definido por la ecuación (6.53), en la que los coeficientes del polinomio $f_0(x)$ son generales, es posible encontrar una solución formal al modelo de matrices en el límite planar dada por un contorno concreto $\tilde{\gamma}_{(k,0)}$ y una densidad de autovalores $\rho_0(s)$ que satisfacen las ecs. (6.35), (6.37) y (6.38). Esta densidad de autovalores viene dada simplemente por la discontinuidad de $y_0(x)$ a lo largo de los cortes. El parámetro de 't Hooft t del modelo de matrices no es más que $-1/4$ veces el coeficiente de orden más alto de $f_0(x)$. Este teorema le sirve a Lazaroiu para clamar que, al contrario de lo que ocurre con la versión hermítica de estos modelos de matrices, el modelo holomorfo de matrices es capaz de explorar todo el espacio de moduli de estructura compleja de M_{def} .

No obstante, como apuntan Bilal y Metzger [125], con este procedimiento se obtiene un $\rho_0(s)$ que es en general complejo. Esto no corresponde, por tanto, con una verdadera solución planar del modelo de matrices. La única forma de que la densidad $\rho_0(s)$ así obtenida satisfaga el requerimiento de que sea real es que los coeficientes de $f_0(x)$ satisfagan ciertas ligaduras, que se traducen en que los moduli X^I sean reales. Por tanto, parece que el modelo de matrices sólo es capaz de explorar la parte del espacio de moduli \mathcal{M} en el que los X^I son reales. Volveremos sobre este punto más adelante.

En esta sección vamos a considerar que los moduli X^I de M_{def} son complejos en general. Las relaciones derivadas en la sección anterior se siguen manteniendo, sólo que ahora se trata de relaciones holomorfas. En particular el prepotencial de M_{def} es una función holomorfa de los moduli X^I , y, por tanto, lo mismo ocurre con los F_I y con la matriz simétrica

$$\tau_{IJ} := \frac{\partial F_I}{\partial X^J} \quad (6.74)$$

En este caso de CY local las amplitudes de la cuerda topológica cerrada, incluida F_0^{closed} no son secciones de \mathcal{L} , sino funciones. Las derivadas covariantes de lo que eran antes secciones de \mathcal{L} son ahora simples derivadas. No hay, por tanto, distinción entre índices grandes X^I y pequeños t^i , las cantidades τ_{IJ} son las funciones de correlación de 2 puntos y las $C_{IJK} = \partial_K \tau_{IJ}$ son las de 3 puntos. En este caso de geometría especial rígida $\text{Im} \tau_{IJ}$ es definido-positiva y coincide con la métrica de Zamolodchikov

$$G_{I\bar{J}} = 2\text{Im} \tau_{IJ} \quad (6.75)$$

Para distinguirlas de las coordenadas x^I de gran espacio de fases, vamos a escribir

las coordenadas del vector holomorfo tangente al punto (X^I, \bar{X}^I) de \mathcal{M} como $x^{i=I}$, es decir,

$$x^{i=I} \frac{\partial}{\partial X^I} \in T_{(X, \bar{X})}^{(1,0)} \mathcal{M} \quad (6.76)$$

de forma que la función de partición de la cuerda cerrada en M_{def} se define como

$$Z_{\text{closed}}(g_s, x^{i=I}; X^I, \bar{X}^I) = \exp \left[\sum_{g=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} g_s^{2g-2} C_{I_1 \dots I_n}^{(g)}(X, \bar{X}) x^{i=I_1} \dots x^{i=I_n} \right] \quad (6.77)$$

Nótese que, por conveniencia, hemos escrito el acoplo de la cuerda cerrada como g_s para hacerlo coincidir con el acoplo del modelo de matrices. Las reglas de selección y la anomalía holomorfa vienen descritas por las mismas ecuaciones que en el caso compacto, pero algunos términos no están presentes

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial X^I} + \frac{i}{2} C_{IJK} (\text{Im} \tau)^{-1KL} x^{j=J} \frac{\partial}{\partial x^{l=L}} - \frac{\partial}{\partial x^{i=I}} + \partial_I F_1 + \frac{1}{2g_s^2} C_{IJK} x^{j=J} x^{k=K} \right] Z_{\text{closed}} &= 0 \\ \left[\frac{\partial}{\partial \bar{X}^I} - \frac{g_s^2}{8} \bar{C}_{I\bar{J}\bar{K}} (\text{Im} \tau)^{-1J\bar{J}} (\text{Im} \tau)^{-1K\bar{K}} \frac{\partial^2}{\partial x^{j=J} \partial x^{k=K}} \right] Z_{\text{closed}} &= 0 \end{aligned} \quad (6.78)$$

En concreto para F_1^{closed} se tiene

$$\frac{\partial}{\partial X^I} \frac{\partial}{\partial \bar{X}^{\bar{J}}} F_1 = \frac{1}{2} C_{IKL} \bar{C}_{\bar{J}\bar{K}\bar{L}} G^{K\bar{K}} G^{L\bar{L}} \quad (6.79)$$

cuya solución se escribe

$$F_1 = -\frac{1}{2} \log |G| + f_1(X) + \bar{f}_1(\bar{X}) \quad (6.80)$$

Al igual que ocurre en el caso compacto, es posible interpretar las ecuaciones de variación para Z_{closed} en términos de la cuantización de H^3 . Siguiendo la misma filosofía del capítulo 4 vamos a considerar 3-formas γ del tipo

$$\gamma = \Omega_\gamma + \bar{\Omega}_\gamma \quad (6.81)$$

donde Ω_γ sea una posible 3-forma holomorfa para M_{def} . Dado que estamos tratando a \hat{X} como un parámetro fijo, en el caso de polarización de Kähler, en la que fijamos una estructura compleja Ω de base, se ha de cumplir

$$\int_{\hat{A}} \Omega_\gamma = \int_{\hat{A}} \Omega = \hat{X} \quad (6.82)$$

Por tanto, el parámetro que en el capítulo 4 denominamos λ^{-1} es ahora exactamente la unidad, de forma que tenemos

$$\gamma = \Omega + x^{i=I} \partial_I \Omega + \text{cc} \quad (6.83)$$

En polarización real, en cambio, describimos γ con las coordenadas reales

$$p^I := \int_{A_o^I} \gamma = 2\text{Re} [X^I + x^{i=I}] \quad (6.84)$$

$$q_I := \int_{B_{oI}} \gamma = 2\text{Re} [F_I + x^{j=J} \tau_{IJ}] \quad (6.85)$$

Mientras que

$$\hat{p} := \int_{\hat{A}} \gamma = 2\text{Re}[\hat{X}] \quad (6.86)$$

es simplemente un parámetro que no promociona a operador en la cuantización. Esto implica que tenemos que considerar como transformaciones simplécticas transformaciones más generales que la transformación (4.95)

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}^I \\ \tilde{B}_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_J^I & \mathcal{C}^{IJ} \\ \mathcal{B}_{IJ} & \mathcal{A}_I^J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_o^J \\ B_{oJ} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{F}^I \\ \mathcal{E}_I \end{pmatrix} \hat{A} \quad (6.87)$$

con $\mathcal{DA} - \mathcal{CB} = \mathbb{I}$. El motivo por el que no se incluye al ciclo \hat{B} en la transformación es para que \tilde{A}^I y \tilde{B}_I sean compactos. Nótese que, si $\mathcal{F}^I \neq 0$, entonces $\#(\tilde{A}^I, \hat{B}) \neq 0$. Asimismo, si $\mathcal{E}_I \neq 0$, entonces $\#(\tilde{B}_I, \hat{B}) \neq 0$. La función generatriz de la transformación canónica correspondiente es

$$S(p, \tilde{p}) = -\frac{1}{2} p^I \mathcal{C}_{IJ}^{-1} \mathcal{D}_K^J p^K + p^I \mathcal{C}_{IJ}^{-1} \tilde{p}^J - \frac{1}{2} \tilde{p}^I \mathcal{A}_I^J \mathcal{C}_{JK}^{-1} \tilde{p}^K + p^I \mathcal{C}_{IJ}^{-1} \mathcal{F}^J \hat{p} - \tilde{p}^I \mathcal{E}_I \hat{p} \quad (6.88)$$

Todo el resto del análisis hecho en el capítulo 4 sobre la polarización real y las transformaciones simplécticas se sigue aplicando, con pequeñas modificaciones debido a las sutilezas discutidas. En particular, las ecuaciones (4.97), (4.100) y (4.101) se siguen verificando de forma exacta, sólo que ahora $I = 1, \dots, d-1$ en vez de $I = 1, \dots, h_{2,1}$, con lo que el grupo simpléctico es $Sp(2d-2, \mathbb{R})$.

Análogamente, todo lo discutido en el capítulo 4 sobre polarización de Kähler y su relación con la real se sigue cumpliendo con pequeños cambios. La relación de conmutación (4.65) es ahora

$$[x^{i=I}, \bar{x}^{\bar{j}=J}] = \frac{\hbar}{2} (\text{Im}\tau)^{-1IJ} \quad (6.89)$$

Como $\text{Im}\tau_{IJ}$ es definido-positiva, todos los $x^{i=I}$ son operadores de aniquilación. Sus autoestados comunes son, por tanto, estados comprimidos propiamente dichos. Se tiene

$$|x^{i=I}\rangle_{X, \bar{X}} = \exp \left[\frac{2}{\hbar} x^{i=I} \bar{x}^{\bar{j}=J} \text{Im}\tau_{IJ} \right] |x^{i=I} = 0\rangle_{X, \bar{X}} \quad (6.90)$$

$$\mathbb{I} = \int d^{d-1} x d^{d-1} \bar{x} 2^{(d-1)/2} \sqrt{|\text{Im}\tau|} \exp \left[-\frac{2}{\hbar} x^{i=I} \bar{x}^{\bar{j}=J} \text{Im}\tau_{IJ} \right] |x^{i=I}\rangle \langle \bar{x}^{\bar{i}=I}| \quad (6.91)$$

La relación entre las variables de Kähler y las de gran espacio de fases es ahora trivial

$$\frac{x^I}{2} = X^I + x^{i=I} \quad (6.92)$$

Por conveniencia posterior denotamos el estado “cuerda topológica” $\langle \psi_{\text{top}} |$ como $\langle \psi_{\text{closed}} |$, que viene definido en este caso por

$$\psi_{\text{closed}}(x^{i=I}; X, \bar{X}) = \langle \psi_{\text{closed}} | x^{i=I} \rangle_{X, \bar{X}} := \exp[f_1(X)] Z_{\text{closed}}(g_s = \sqrt{\hbar}, x^{i=I}; X, \bar{X}) \quad (6.93)$$

Las ecuaciones de variación de esta función de onda con respecto al punto de base son ahora

$$\left[\frac{\partial}{\partial \bar{X}^I} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{X}^I} \log |\text{Im} \tau| + \frac{i}{2} C_{IJK} (\text{Im} \tau)^{-1KL} x^{j=J} \frac{\partial}{\partial x^{l=L}} + \frac{1}{8\hbar} C_{IJK} x^{j=J} x^{k=K} \right] \psi_{\text{closed}} = 0$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \bar{X}^I} - \frac{\hbar}{2} \bar{C}_{\bar{I}\bar{J}\bar{K}} (\text{Im} \tau)^{-1J\bar{J}} (\text{Im} \tau)^{-1K\bar{K}} \frac{\partial^2}{\partial x^{j=J} \partial x^{k=\bar{K}}} \right] \psi_{\text{closed}} = 0 \quad (6.94)$$

Como en el límite holomorfo $X^I + x^{i=I} \rightarrow p^I$, en polarización real se tiene

$$\langle \psi_{\text{closed}} | p \rangle = \exp \left[\sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{g-1} F_g^{\text{closed}}(p, \bar{X}_{\infty}) \right] \quad (6.95)$$

En el punto de base del atractor se tiene

$$\langle \psi_{\text{closed}} | x^{i=I} = 0 \rangle_{X, \bar{X}} = \exp \left[f_1(X) + \sum_{g=2} \hbar^{g-1} F_g^{\text{closed}}(X, \bar{X}) \right] \quad (6.96)$$

De forma que la relación diagramática entre la función de onda en polarización real y de Kähler se escribe ahora como

$$\langle \psi_{\text{closed}} | x^{i=I} = 0 \rangle_{X, \bar{X}} = \quad (6.97)$$

$$= \exp \left[f_1(X) + \sum_{g=2} \hbar^{g-1} (F_g^{\text{closed}}(X, \bar{X}_{\infty}) + \Gamma_g((-2i\text{Im} \tau)^{-1}, \partial_{I_1} \dots \partial_{I_n} F_{r < g}^{\text{closed}}(X, \bar{X}_{\infty})) \right]$$

Además de $F^{\text{closed}}(X, \bar{X})$, existen en la literatura otras funciones asociadas a la topología de variedades CY locales que, como M_{def} , vienen dadas en términos de una curva algebraica. Se trata de las energías libres geométricas de la ref. [131], que denotamos como $\underline{F}_g^{\text{H}}(X^i)$. Dada una curva algebraica general de género $d-1$, definida por la ecuación

$$H(x, y) = 0 \quad (6.98)$$

y una base de ciclos A^I, B_J , con $I, J = 1, \dots, d-1$, se define el núcleo de Bergmann $\underline{B}(p, q)$ como la única forma bilineal en $H(x, y)$ tal que

- cuando al punto p de la curva se aproxima a q se tiene que

$$\underline{B}(p, q) \sim_{p \rightarrow q} \frac{dz(p)dz(q)}{[z(p) - z(q)]^2} + \text{finito} \quad (6.99)$$

- sus periodos A son cero

$$\int_{A^I} \underline{B} = 0 \quad (6.100)$$

Las funciones $\underline{F}_g^H(X^I)$ se definen, junto con toda una secuencia de formas meromorfas multilineales $\underline{W}_k^{(g)}(p_1, \dots, p_k)$ en $H(x, y)$, de forma recursiva, a partir de \underline{B} , en términos de residuos localizados en los puntos de rama (“branch points”) asociados a la curva. La forma exacta de estas relaciones recursivas no nos interesa en esta discusión. Lo que sí nos interesa es remarcar que

- Las cantidades geométricas \underline{F}_g^H y $\underline{W}_k^{(g)}(p_1, \dots, p_k)$ están definidas de tal manera que si $H(x, y) = y^2 - [W'(x)]^2 - f_0(x)$, y si la base elegida de ciclos es (A_o^I, B_{oJ}) , entonces

$$\underline{F}_g^H = F_g^{\text{open}}(X^I, \hat{X}) \quad (6.101)$$

y

$$\sum_{g=0}^{\infty} g_s^{2g-2+k} \underline{W}_k^{(g)}(p_1, \dots, p_k) = \left\langle \sum_{m_1=1}^N \frac{dx(p_1)}{x(p_1) - \lambda(s_{m_1})} \cdots \sum_{m_k=1}^N \frac{dx(p_k)}{x(p_k) - \lambda(s_{m_k})} \right\rangle_{X^I, \hat{X}} \quad (6.102)$$

- Toda la información acerca de la base concreta de ciclos elegida está contenida dentro del núcleo de Bergmann. Esto facilita el poder estudiar cómo varían las cantidades \underline{F}_g^H y $\underline{W}_k^{(g)}(p_1, \dots, p_k)$ si realizamos una transformación simpléctica. En concreto el núcleo de Bergmann transforma de la forma

$$\tilde{\underline{B}} = \underline{B} + 2\pi i \partial_I \Omega \Delta^{IJ} \partial_J \Omega \quad (6.103)$$

$$\text{con } \Delta^{IJ} = [\tau - \mathcal{C}^{-1} \mathcal{D}]^{IJ}.$$

La ref. [131] utiliza también un núcleo de Bergmann modificado $B(p, q)$. Éste, en vez de satisfacer la relación (6.100), verifica

$$\int_{A^I} B - \kappa^{IJ} \int_{B_J} B = 0 = 0 \quad (6.104)$$

con κ^{IJ} una matriz simétrica compleja arbitraria. A partir de B se obtienen las cantidades modificadas F_g^H y $W_k^{(g)}(p_1, \dots, p_k)$ que dependen de κ y que verifican trivialmente

$$\underline{F}_g^H = F_g^H|_{\kappa=0} \quad (6.105)$$

$$\underline{W}_k^{(g)}(p_1, \dots, p_k) = W_k^{(g)}(p_1, \dots, p_k)|_{\kappa=0} \quad (6.106)$$

De nuevo, toda la información acerca del κ elegido está contenida en el núcleo de Bergmann modificado B , lo que facilita el cálculo de las variaciones $\frac{\partial F_g^H}{\partial \kappa}$. De (6.103) es claro que

$$B(p, q) = \underline{B}(p, q) + 2\pi i \partial_I \Omega \kappa^{IJ} \partial_J \Omega \quad (6.107)$$

Es directo calcular cómo transforma el núcleo de Bergmann modificado bajo una transformación simpléctica

$$\begin{aligned}\tilde{B} &= \underline{\tilde{B}} + 2\pi i \tilde{\partial}_I \Omega \kappa^{IJ} \tilde{\partial}_J \Omega = \\ &= \underline{B} + 2\pi i \tilde{\partial}_I \Omega \kappa^{IJ} \tilde{\partial}_J \Omega + 2\pi i \partial_I \Omega \Delta^{IJ} \partial_J \Omega \\ &= \underline{B} + 2\pi i \partial_I \Omega [\Delta^{IJ} + \xi_K^I \kappa^{KL} \xi_L^J] \partial_J \Omega\end{aligned}\quad (6.108)$$

donde hemos usado que $\tilde{\partial}_I \Omega = \xi_I^J \partial_J \Omega$, siendo $\xi_I^J = \Delta^{JK} \mathcal{C}_{KI}^{-1}$. De esta última ecuación se observa que existe un κ^{IJ} privilegiado tal que, si, en vez de mantenerse invariante simpléctico, transforma de la forma

$$\tilde{\kappa}^{IJ} = \xi_K^{-1I} (\kappa^{KL} - \Delta^{KL}) \xi_L^{-1J} \quad (6.109)$$

entonces B es invariante simpléctico. De la ecuación (4.211) vemos que este κ privilegiado es

$$\kappa^{IJ} = (-2i\text{Im}\tau)^{-1IJ} = \check{\Delta}^{IJ} \quad (6.110)$$

Con esta elección de κ las correspondientes cantidades modificadas F_g^H y $W_k^{(g)}(p_1, \dots, p_k)$ son invariantes simplécticas. Por otro lado, es claro que las energías libres geométricas modificadas de esta manera F_g^H van a tener dependencia no holomorfa en los moduli de estructura compleja, y que esta dependencia está contenida totalmente en el κ dado por la ec. (6.110). La ref. [129] utiliza las variaciones $\frac{\partial F_g^H}{\partial \kappa}$, calculadas en [131], evaluadas en el caso particular dado por la ec. (6.110) para estudiar la dependencia no holomorfa de $F_g^H(X, \bar{X})$. El resultado que se encuentra es que las energías libres geométricas modificadas satisfacen las ecuaciones de la anomalía holomorfa. La relación entre las energías libres geométricas modificadas y sin modificar que se encuentra en la ref. [129] es

$$F_g^H(X^I, \bar{X}^{\bar{I}}) = \underline{F}_g^H(X^I) + \Gamma_g \left[\kappa^{IJ}, \partial_{I_1, \dots, I_m} \underline{F}_{r \leq g}^H(X^I) \right] \quad (6.111)$$

Pero acabamos de ver que, desde el punto de vista de la cuatización de $H^3(M_{\text{def}}, \mathbb{R})$ ésta última ecuación no es más que la relación diagramática (6.97) entre una función de onda en polarización real la correspondiente de Kähler. La elección del κ concreto en la ec. (6.110) tiene, por tanto, una fácil interpretación: se trata del cambio de variables canónico que lleva de la polarización real a la de Kähler.

De la discusión del párrafo anterior es claro que, si hacemos el mismo análisis para el caso en que consideramos una transformación simpléctica general (6.87), las energías libres geométricas sin modificar \underline{F}_g^H cambian de la forma

$$\underline{F}_g^H(X^I) \rightarrow \underline{F}_g^H(X_{\text{cl}}^I) + \Gamma_g \left[\Delta^{IJ}, \partial_{I_1, \dots, I_m} \underline{F}_{r \leq g}^H(X_{\text{cl}}^I) \right] \quad (6.112)$$

Una forma de ver esto es darse cuenta de que las cantidades \tilde{F}_g^H son iguales a $F_g^H|_{\kappa=\Delta}$. Obtenemos, por tanto, el resultado de que las cantidades \underline{F}_g^H transforman bajo una transformación simpléctica de la misma manera que φ_g (véase la ec. (4.100)). Pero

vimos en el capítulo 4 que éstas son precisamente las únicas condiciones que una secuencia de funciones φ_g debe satisfacer para constituir la expansión WKB de un estado $|\psi\rangle$ perteneciente al espacio de Hilbert ingénuo \mathcal{H}_o de la cuantización de $H^3(M_{\text{def}}, \mathbb{R})$. Este estado es invariante simpléctico e independiente del background de estructura compleja. Por este motivo encontramos que podemos asociar a cualquier curva algebraica $H(x, y) = 0$ un estado $|\psi_H\rangle$ tal que

$$\langle \psi_H | p \rangle_{(A^I, B_J)} = \exp \sum_{g=0} \hbar^{g-1} \underline{F_g^H}(p; (A^I, B_J)) \quad (6.113)$$

es su representación de momento. En el caso de que la curva sea la curva espectral del modelo de matrices $\hat{\Sigma}_{d-1}$ denotaremos este estado por $|\psi_{\text{open}}\rangle$.

Llamemos $F_g^{\text{closed}}(X, \bar{X})$ a las energías libres de la cuerda topológica cerrada en cualquier CY local M_H que pueda escribirse de la forma

$$-H(x, y) + v^2 + w^2 = 0 \quad (x, v, w, y) \in \mathbb{C}^4 \quad (6.114)$$

Una de las conclusiones de la ref. [129] es que las energías libres geométricas modificadas $F_g^H(X, \bar{X})$ han de ser iguales a $F_g^{\text{closed}}(X, \bar{X})$ salvo cantidad holomorfa e invariante modular. Así, por ejemplo, en el caso de que la curva sea $\hat{\Sigma}_{d-1}$, lo que queda para probar la conjetura de Dijkgraaf-Vafa es demostrar que estas cantidades holomorfas e invariantes modulares son cero para todo género. Esto puede hacerse, en principio, imponiendo que condiciones de frontera adecuadas en el punto de “conifold” del espacio de moduli de estructura compleja. Con los resultados del capítulo 4 y la definición (6.113) esto no es más que aseverar que

$$|\psi_H\rangle = |\psi_{\text{closed}}\rangle \quad (6.115)$$

Podemos ver que no se trata de una conjetura alocada, ya que ambos estados están definidos como una propiedad topológica de la superficie $H(x, y) = 0$. Nótese, sin embargo, que, aunque ambos son invariantes topológicos de la variedad local M_H , su origen es totalmente diferente:

- $|\psi_{\text{closed}}\rangle$ viene de la teoría de cuerdas topológicas cerradas en M_H en la que se fija como background una estructura compleja concreta $(\Omega, \bar{\Omega})$. Este es el motivo por el que se puede decir que la polarización natural asociada a la cuerda topológica cerrada en M_H es $|x^{i=I}\rangle_{\Omega, \bar{\Omega}}$.
- $|\psi_H\rangle$ viene de las energías libres geométricas $\underline{F_g^H}(p^I; (A^I, B_J))$, que pueden obtenerse de M_H mediante la elección previa de una base simpléctica (A^I, B_J) . Estas funciones no dependen de la estructura compleja de M_H . Este es el motivo por el que podemos decir que la polarización natural asociada a las energías libres geométricas es $|p^I\rangle_{(A^I, B_J)}$.

Por último, indiquemos que, en particular, la conjetura (6.115) implica que $|\psi_H\rangle$ es realmente un estado perteneciente al espacio de Hilbert físico $\mathcal{H}_{\text{phys}}$, esto es, uno que satisface la condición (4.41).

6.3. Transición geométrica como un cambio de polarización

Situémonos en el caso concreto en el que

$$H(x, y) = y^2 - [W'(x)]^2 - f_0(x) \quad (6.116)$$

Entonces $M_H = M_{\text{def}}$. Hemos visto en la sección anterior que podemos interpretar la función de partición geométrica asociada a M_{def} como la función de onda en polarización real de un estado de la cuantización de $H^3(M_{\text{def}}, \mathbb{R})$, en la representación que viene dada por la base simpléctica de ciclos elegida. Esto es así sea cual sea la base simpléctica de ciclos elegida. Por otro lado, las energías libres geométricas coinciden con las energías libres de las cuerdas topológicas abiertas ancladas en los \mathbb{CP}_a^1 sólo en el caso en el que la base elegida sea (A_o^I, B_{oJ}) . Vemos, por tanto, que, mientras que tenemos una definición (6.113) del estado $|\psi_H\rangle = |\psi_{\text{open}}\rangle$ a partir de su función de onda en polarización real **en cualquier representación**⁵, las energías libres de la cuerda abierta F_g^{open} constituyen la expansión WKB de la función de onda asociada a $|\psi_{\text{open}}\rangle$ **en una representación concreta** privilegiada

$$\langle \psi_{\text{open}} | p \rangle_{(A_o^I, B_{oJ})} = \exp \sum_{g=0} \hbar^{g-1} F_g^{\text{open}}(p) \quad (6.117)$$

En otras palabras, la polarización natural asociada a las cuerdas topológicas abiertas en M_{res} es $|p\rangle_{(A_o^I, B_{oJ})}$.

Recapitulando, hemos visto que podemos asociarle, tanto al lado abierto como en el cerrado de la dualidad de Dijkgraaf-Vafa, sendos estados de la cuantización de $H^3(M_{\text{def}}, \mathbb{R})$, de tal forma que la conjetura de Dijkgraaf-Vafa se escribe

$$|\psi_{\text{open}}\rangle = |\psi_{\text{closed}}\rangle \quad (6.118)$$

Por tanto, de acuerdo con la conjetura, las amplitudes de las cuerdas topológicas abiertas y cerradas no son más que diferentes representaciones del mismo estado cuántico. Este estado cuántico tiene entidad de forma independiente del background, e independiente de si estamos situados en el lado abierto o cerrado de la dualidad. El proceso de transición geométrica que lleva desde la geometría M_{res} , con las branas enrolladas en los \mathbb{CP}_a^1 , hasta M_{def} , sin branas, se entiende en este contexto como un cambio de

⁵Insistimos en que la representación viene dada por la base de ciclos elegida.

polarización que lleva desde una representación concreta de polarización real hasta una representación de polarización de Kähler con una estructura compleja de base concreta. En este trabajo proponemos que este es el modo natural de entender esta dualidad de “gran N”. Nótese que:

- En el lado cerrado de la dualidad las funciones de onda tienen una dependencia no-holomorfa en el background de estructura compleja, pero son invariantes modulares. Esto se corresponde con el hecho de que lo que tenemos es una geometría del espacio blanco con una estructura compleja concreta $(\Omega, \bar{\Omega})$ pero sin ninguna base simpléctica privilegiada. Sólo se tiene una base simpléctica privilegiada una vez se han definido los periodos X^I .
- En el lado abierto, en cambio, las funciones de onda son de variable real, con continuación analítica holomorfa, pero no son invariantes modulares. Esto se corresponde con el hecho de que la geometría resuelta M_{res} ya no posee como moduli de estructura compleja a las cantidades X^I . Éstas han sido reemplazadas por branas. Hemos perdido, por tanto, la dependencia en el background de estructura compleja. Sin embargo, en este lado abierto, la información sobre Ω está codificada en el número N_a de branas que hay en cada \mathbb{CP}_a^1 . Hay, por tanto, una base simpléctica privilegiada, aquella en la que

$$X^I = 4\pi^2 \sum_{J=1}^I g_s N_I \quad (6.119)$$

Nos gustaría señalar también que, si suponemos que M_{def} es el límite local de otro CY con sector compacto más grande, se pueden extender naturalmente las propuestas (6.113) y (6.115) para incluir también el sector no compacto de M_{def} . El ciclo \hat{B} se podría entender entonces como el límite de un ciclo compacto y el parámetro de 't Hooft $t \propto \hat{X}$ sería entonces un verdadero modulus. Estaríamos cuantizando entonces un espacio de más grande $I = 1, 2, \dots, d, \dots$. No obstante, sería interesante encontrar la forma de llevar a cabo esta extensión trabajando directamente con M_{def} sin tomar ningún límite.

Consideremos ahora la transformación simpléctica concreta

$$\tilde{A}^I = -B_{oI} \quad (6.120)$$

$$\tilde{B}_J = A_o^J \quad (6.121)$$

En este caso concreto podemos ver que el prepotencial de M_{def} cambia según la transformada de Legendre

$$\tilde{F}_0^{\text{open}}(t, \Pi_I) = F_0^{\text{open}}(t, X^I) - \sum_{I=1}^{d-1} \Pi_I X^I \quad (6.122)$$

donde

$$\Pi_I := \frac{\partial F_0^{\text{open}}}{\partial X^I} \quad (6.123)$$

De las ecuaciones (6.49) y (6.50) vemos que el prepotencial transformado $\tilde{F}_0^{\text{open}}$ no es más que la energía libre en el colectivo macrocanónico del modelo de matrices, pero ahora expresado en las variables Π_I . Más aun, si escribimos los sumatorios de la ec. (6.44) para N suficientemente grande como integrales y extrapolamos los valores de N_a también al eje negativo, podemos interpretar la ec. (6.44) como una transformada de Fourier para la función de onda $\psi_{\text{open}}(p)$. Vemos por tanto que, aunque la descripción de cuerda abierta (con un número dado de branas en cada $\mathbb{C}P_a^1$) lleva asociada una base simpléctica concreta, el modelo de matrices no. Es sólo el hecho de fijar el colectivo lo que fija la base y, por tanto, la representación. Esto lleva a considerar, en las condiciones en las que es válida la expansión de “gran N ”, generalizaciones de la ecuación (6.44) que correspondan a todas las transformaciones simplécticas posibles, esto es, a ecuaciones del tipo (4.97). De esta manera podemos definir un colectivo para el modelo de matrices holomorfo asociado a cada base simpléctica posible.

Este resultado explica la observación hecha en la sección anterior de que el modelo de matrices sólo parece generar un subconjunto de todas las superficies de Riemann $\hat{\Sigma}_{d-1}$ posibles (es decir, de todas las estructuras complejas en M_{def} posibles), aquellas para las que los periodos X^I eran reales. El intentar definir el modelo de matrices a través de un M_{def} con estructura compleja general, es decir, con coeficientes $f_0(x)$ arbitrarios, mediante el teorema de reconstrucción de Lazaroiu daba lugar a una densidad de autovalores $\rho_0(s)$ compleja. La ref. [125] encuentra que con este procedimiento es posible definir un prepotencial para M_{def} independiente de cualquier cut-off y tal que se verifican las relaciones de la geometría esencial. A la vista de los resultados de este capítulo, podemos decir que el modelo de matrices no genera M_{def} con todas sus posibles estructuras complejas, sino M_{def} con sus posibles bases simplécticas de 3-ciclos. Esto es perfectamente natural en nuestro marco: el modelo de matrices no describe las distintas representaciones de polarización de Kähler, sino las de polarización real. Es claro ahora por qué los periodos generados por el modelo de matrices parecían ser reales: no se trata de los periodos, sino de las coordenadas p^I de polarización real.

Por último, nos gustaría indicar que todo el análisis realizado en la sección 6.2 es válido para cualquier curva algebraica de las consideradas en la ref. [131]. Esto incluye, en particular, a los backgrounds de la referencia [132]. Estos backgrounds no tienen asociada de forma directa una transición geométrica, pero sí que se les puede asociar con cierto límite de transiciones geométricas [133]⁶. Sería interesante extender las conclusiones de esta sección a esas transiciones geométricas más complicadas.

⁶Agradezco a M. Mariño esta puntualización.

6.4. Caso de branas no compactas

Por completitud, vamos a revisar el caso en el que añadimos, en el lado cerrado de la dualidad de Dijkgraaf-Vafa, branas no compactas. Se trata de branas situadas en el punto $(x, z) = (x_i, -iy_i)$ tal que el par (x_i, y_i) pertenece a $\hat{\Sigma}$

$$H(x_i, y_i) = 0 \quad (6.124)$$

Su volumen de mundo viene dado, por tanto, por $v^2 + w^2 = 0$.

En la ref. [122] se estudia la dualidad cuerda cerrada/cuerda abierta para este tipo de branas. Al contrario de lo que ocurre en el caso compacto, en el que se introduce una deformación $f_0(x)$, las deformaciones que inducen estas branas no compactas cambian los coeficientes de $W(x)$. Vamos a escribir

$$W(x) = \sum_{a=0}^{\infty} u_a x^a \quad (6.125)$$

con

$$u_a = u_a^{(0)} + \delta u_a \quad (6.126)$$

$$u_a^{(0)} = 0 \quad \text{para } a > d + 1 \quad (6.127)$$

La SFT de las cuerdas cerradas en M_{def} se reduce a una teoría para un bosón ϕ en $\hat{\Sigma}$, de tal manera que su función de partición va a depender, además de los moduli X^I y sus deformaciones $x^{i=I}$, de u_a^0 y δu_a . Lo que nos interesa ahora es esta última dependencia

$$Z_{\text{closed}}(g_s, u_a; u_a^0, \bar{u}_a^0) \quad (6.128)$$

Las deformaciones δu_a se interpretan como deformaciones de la estructura compleja en el infinito $x \rightarrow \infty$. El operador $\partial\phi$ corresponde a $y(x)$, de tal manera que, para $|x| \gg 1$ se tiene

$$\langle \partial\phi \rangle = y(x) = W'(x) - 2tw_0(x) \simeq \sum_{a=1}^{\infty} a u_a x^{a-1} \quad (6.129)$$

Dado que $\partial\phi$ tiene la siguiente expansión en operadores creación/anihilación

$$\partial\phi = \sum_{a \in \mathbb{Z}} \alpha_a x^{-a-1} \quad (6.130)$$

$$[\alpha_a, \alpha_b] = -2g_s^2 a \delta_{a+b,0} \quad (6.131)$$

se tiene que el estado frontera asociado a esta deformación en $x \rightarrow \infty$ es un estado coherente

$$\begin{aligned} \alpha_{-a} |u_a\rangle &= a u_a |u_a\rangle, \\ \alpha_a |u_a\rangle &= 2g_s^2 \frac{\partial}{\partial u_a} |u_a\rangle; \quad a > 0 \end{aligned} \quad (6.132)$$

La función de partición se puede escribir como un producto escalar

$$Z_{\text{closed}} = \langle \hat{\Sigma} | u_a \rangle \quad (6.133)$$

de tal manera que

$$\begin{aligned} \langle \partial \phi \rangle &= \frac{\langle \hat{\Sigma} | \partial \phi | u_a \rangle}{\langle \hat{\Sigma} | u_a \rangle} = \\ &= \sum_{a=1}^{\infty} a u_a x^{a-1} + 2g_s^2 \sum_{a=0}^{\infty} a^{-a-1} \frac{\partial F_{\text{closed}}}{\partial u_a} \end{aligned} \quad (6.134)$$

Los resultados que nos interesan de la ref. [122] son:

- Por analogía con el caso no compacto, la deformación que producen N_{nc} branas no compactas situadas en el punto $P(x_i, y_i)$ ha de ser tal que

$$\oint_P \Omega \propto g_s N_{\text{nc}} \quad (6.135)$$

Esto se escribe cuánticamente como

$$\langle \oint_P \partial \phi dx \rangle_{N_{\text{nc}}} = N_{\text{nc}} g_s \quad (6.136)$$

lo que implica que la deformación viene inducida por el operador

$$\Psi(x_i) = \exp \left[-\frac{\phi(x_i)}{2g_s} \right] \quad (6.137)$$

La introducción de operadores del tipo (6.137) es equivalente a introducir el estado frontera $|u_a\rangle$, con

$$\delta u_a = \frac{g_s}{a} \sum_i (x_i)^{-a} \quad (6.138)$$

- De la SFT de las cuerdas abiertas ancladas en las branas no compactas se tiene que los campos x e y del volumen de mundo de estas branas no conmutan, sino que obedecen la relación

$$[x, y] = g_s \quad (6.139)$$

Esto implica que la función de partición de estas cuerdas abiertas Z_{nc} es función sólo de x , y que, si se elige otro conjunto de coordenadas (\tilde{x}, \tilde{y}) relacionada con las anteriores mediante una transformación canónica

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x, y) \quad (6.140)$$

$$\tilde{y} = \tilde{y}(x, y) \quad (6.141)$$

la nueva función de partición se relaciona con la anterior mediante⁷

$$\tilde{Z}_{\text{nc}}(\tilde{x}) = \int dx \exp \left[-\frac{1}{g_s} S(x, \tilde{x}) \right] Z_{\text{nc}}(x) \quad (6.142)$$

con $S(x, \tilde{x})$ el generador de la transformación.

⁷En rigor, esta fórmula es sólo exacta en el caso de que la transformación canónica sea lineal.

- La SFT asociada al conjunto de branas no compactas viene dada por un modelo de matrices de tipo Kontsevich para una matriz Y cuyos autovalores representan las posiciones y_i de las branas. A g_s pequeño se tiene

$$Z_{\text{nc}}(x_i) \simeq \exp \left[-\frac{1}{2g_s} \int_i^x y(x') dx' \right] \quad (6.143)$$

Vemos, por tanto, que en este caso no compacto también podemos interpretar la función de partición de las cuerdas abiertas como una función de onda, pero en una cuantización (6.139) muy distinta a la de $H^3(M_{\text{def}})$. En lo que sigue vamos a analizar cómo podemos obtener estos resultados desde el punto de vista del lado abierto de la dualidad de Dijkgraaf-Vafa, es decir, a partir del modelo holomorfo de matrices.

En primer lugar, la relación (6.134) conduce a representar $\partial\phi$ en el modelo de matrices mediante el operador

$$\partial\phi = W'(x) - 2g_s \sum_{m=1}^N \frac{1}{x - \lambda(s_m)} \quad (6.144)$$

En efecto, se tiene entonces

$$\left\langle W'(x) - 2g_s \sum_{m=1}^N \frac{1}{x - \lambda(s_m)} \right\rangle = \sum_{a=1}^{\infty} a u_a x^{a-1} + 2g_s^2 \sum_{a=0}^{\infty} a^{-a-1} \frac{\partial F_{\text{open}}}{\partial u_a}$$

Según lo discutido en la sección anterior, para relacionar entonces este valor medio con la ec. (6.134) hay que hacer un cambio de polarización. De acuerdo con este resultado, el operador $\Psi(x_i)$ se escribe

$$\begin{aligned} \Psi(x_i) &= \exp \left[-\frac{\phi(x_i)}{2g_s} \right] = \\ &= \exp \left[-\frac{W'(x)}{2g_s} + \sum_{m=1}^N \log(x_i - \lambda(s_m)) \right] = \\ &= \exp \left[-\frac{W'(x)}{2g_s} \right] \det(x_i - M) \end{aligned} \quad (6.145)$$

La deformación que inducen las branas no compactas se puede obtener, por tanto, de introducir este operador en el modelo de matrices. Dado que

$$\text{Tr} \log(x_i - M) = - \sum_{a=1}^{\infty} \frac{x^{-a}}{a} \text{Tr} M^a + \log x \quad (6.146)$$

se tiene que las branas no compactas provocan una deformación del potencial que es, exactamente, la dada por la ec. (6.138).

Siguiendo el procedimiento propuesto en la ref. [19] podemos derivar también la relación de cuantización (6.139) a partir del modelo de matrices. Para ello denotamos por

$$\Pi_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{h_n}} + \dots \quad (6.147)$$

los polinomios ortonormales asociados al modelo de matrices y definimos el conjunto de funciones de onda

$$\psi_n(x) = \Pi_n(x) e^{-\frac{W(x)}{2g_m}} \quad (6.148)$$

Estas funciones de onda están normalizadas de la forma

$$\int ds \bar{\psi}_m(\bar{x}(s)) \psi_n(x(s)) = \delta_{m,n} \quad (6.149)$$

Sobre este conjunto de funciones definimos los operadores \hat{x} tales que

$$\int ds \bar{\psi}_m(\bar{x}(s)) \hat{x} \psi_n(x(s)) = \sqrt{\frac{h_m}{h_{m-1}}} \delta_{m,n+1} + \sqrt{\frac{h_n}{h_{n-1}}} \delta_{m+1,n} \quad (6.150)$$

Entonces de las relaciones de recurrencia de los polinomios ortonormales se obtiene que

$$\hat{x} \psi_n(x) = x \psi_n(x) \quad (6.151)$$

Interpretamos por tanto las funciones $\psi_n(x)$ como las funciones de onda asociadas a los estados abstractos $|\psi_n\rangle$ en la representación x

$$\langle \psi_n | x \rangle = \psi_n(x) \quad (6.152)$$

La representación momento correspondiente viene dada por el operador \hat{y} , que se define como de

$$\langle \psi_n | \hat{y} | x \rangle = g_s \frac{\partial}{\partial x} \psi_n(x) \quad (6.153)$$

Con esta notación todo valor medio del modelo de matrices se puede escribir en términos de valores medios mecanocuánticos asociados a cierto colectivo estadístico. Este colectivo se define como aquel cuyo operador densidad es

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \quad (6.154)$$

Así, por ejemplo, se tiene

$$\langle \frac{1}{N} \text{Tr} M^a \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{x}^a) \quad (6.155)$$

Estos valores medios se pueden escribir en términos de la función de Wigner

$$F^W(-iy, x) = \frac{1}{\pi g_s} \int ds e^{-\frac{yx(s)}{g_s}} \langle x + x(s) | \hat{\rho} | x - x(s) \rangle \quad (6.156)$$

asociada al colectivo. Especial interés tiene escribir de esta manera el valor medio de la traza normalizada del resolvente

$$\langle w(s_m; x) \rangle = \int ds \int ds' F^W(-iy(x(s')), x(s)) \frac{1}{x - x(s)} \quad (6.157)$$

ya que conduce a

$$\langle \rho(s, s_m) \rangle = \int ds' F^W(-iy(x(s')), x(s)) \quad (6.158)$$

Por tanto, en este contexto la densidad de autovalores es la distribución de probabilidad cuántica asociada al colectivo estadístico de encontrar una partícula en la posición x . En este contexto también es claro por qué podemos interpretar $Z_{\text{nc}}(x^i)$ como una función de onda. En el caso particular $n = N$ se tiene que

$$\psi_N(x) = \frac{1}{\sqrt{h_N}} \exp \left[-\frac{W'(x)}{2g_s} \right] \langle \det(x - M) \rangle = \quad (6.159)$$

$$\simeq \exp \left[-\frac{1}{2g_s} \int^x y(x') dx' \right] \quad (6.160)$$

con lo que $\psi_N(x^i)$ coincide con la función de partición asociada a una brana no compacta situada en x_i . Nótese también que, de las relaciones (6.145) y (6.102), se tiene que las energías libres a género g de las cuerdas abiertas ancladas en las branas no compactas situadas en p_1, p_2, \dots, p_k se pueden escribir como expresiones integrales de las formas $\underline{W}_k^{(g)}(p_1, \dots, p_k)$ de la sección 6.2.

Para finalizar, terminamos esta sección con una serie de comentarios:

- Dado que $Z_{\text{nc}}(x^i)$ puede interpretarse como una función de onda, es posible definir [102], si trabajamos con las variables

$$z \propto y - \frac{\partial^2 \bar{F}_0}{\partial \bar{x}^2} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_o} x \quad (6.161)$$

lo que sería el análogo a la polarización de Kähler en esta cuantización. La correspondiente función de onda en polarización de Kähler $\psi(z; x_o, \bar{x}_o)$ es dependiente del background. Sería interesante comprobar que ésta es la forma natural de representar la función de partición en el lado “cerrado” de la dualidad también en este caso de branas no compactas.

- Es bien sabido que, si hacemos un límite al continuo en el modelo de matrices, éste pasa a describir la física de cuerdas no críticas en las que el sector de materia tiene carga central menor o igual que 1. En este límite, las branas compactas de las secciones anteriores y las no-compactas que hemos considerado en esta sección juegan el papel de branas ZZ y FZZT respectivamente. En concreto, las funciones de partición $Z_{\text{open}}(p^I)$ y $Z_{\text{nc}}(x^i)$ se convierten en este límite en

las funciones de partición asociadas a estas branas de la teoría de cuerdas no crítica. El hecho de que ambas puedan interpretarse como funciones de onda, la primera en la cuantización de H^3 , la segunda en la cuantización de $H(x, y)$, tiene implicaciones importantes en la física de este tipo de branas. Estudiamos este tema en el apéndice B.

- Es de esperar que un conocimiento más profundo acerca de la relación entre estas dos cuantizaciones nos dé nuevas ideas acerca de la relación entre los agujeros negros CY y las cuerdas topológicas. En el análisis realizado en el capítulo 5 las coordenadas (p, q) del espacio de fases H^3 se identifican con las cargas del agujero negro. Toman, por tanto, valores discretos. Este hecho, aunque frecuentemente ignorado en la literatura sobre la cuantización de H^3 , está contenido de forma natural en el formalismo del modelo de matrices: las cantidades p^I representan el número de autovalores localizados en los puntos críticos del potencial W . El hecho de que los p^I son discretos está también incluido en la cuantización de la curva $H(x, y) = 0$: se trata de la regla de cuantización de Bohr-Sommerfeld asociada al contorno en $H(x, y) = 0$ que rodea el punto crítico donde los autovalores están localizados [19] (véase apéndice B).

Conclusiones

En esta tesis hemos hecho un estudio detallado de la cuantización del espacio de fases $H^3(CY, \mathbb{R})$. Se ha encontrado que los distintos estados cuánticos se pueden representar de forma rigurosa básicamente en términos de dos tipos distintos de polarizaciones:

- Polarización de Kähler. Las funciones de onda en esta polarización se corresponden (ec. (4.70)) con el producto escalar del estado que queremos representar por ciertos estados comprimidos (“squeezed states”). Las anchuras en el espacio de fases y los parámetros de “squeezing” dependen de la estructura compleja de base (t, \bar{t}) que se elija para el CY . Por tanto, las distintas representaciones en esta polarización corresponden a las distintas estructuras complejas de base. Bajo un cambio de esta estructura compleja de base las funciones de onda transforman según las ecs. (4.129).
- Polarización real. Las funciones de onda en esta polarización son las funciones de onda “usuales” en mecánica cuántica (ec. (4.88)), es decir, el producto del estado por los autoestados del operador “coordenadas” (o “momento”). Para poder definir estos operadores “coordenadas” y “momento” es necesario elegir una base simpléctica concreta para H^3 . Esto implica que las distintas representaciones en esta polarización corresponden con las distintas elecciones de bases simplécticas. Ante una transformación simpléctica modular las funciones de onda transforman según la ec. (4.97).

Existe la posibilidad de cuantizar el sistema utilizando polarizaciones híbridas (holomorfas y antiholomorfas) pero las distintas representaciones en este tipo de polarizaciones acaban reduciéndose básicamente a las representaciones de polarización real o de Kähler.

Hemos estudiado la transformación unitaria que lleva de la polarización de Kähler a la real y viceversa. El primero de estos procesos es equivalente a tomar el límite holomorfo en la estructura compleja de base. Por tanto, las funciones de onda en polarización real se pueden obtener básicamente a partir de las de Kähler mandando la dependencia en \bar{t} a infinito y tomando la dependencia en t como dependencia funcional (ec.(4.194)). El proceso inverso se puede representar diagramáticamente (ec.(4.208)) en

términos de ciertos diagramas de Feynmann en los que la dependencia no-holomorfa está contenida completamente en el propagador.

La función de partición de la cuerda topológica cerrada Z_{top} en cada estructura compleja de background (t, \bar{t}) se puede interpretar de forma natural como la función de onda en polarización de Kähler, correspondiente a esa estructura compleja, asociada a cierto estado físico $|\psi_{\text{top}}\rangle$ de la teoría. La expansión en \hbar coincide precisamente con la expansión en género. El hecho de que Z_{top} sea una función de onda en polarización de Kähler implica que su límite holomorfo es una función de onda en polarización real. Al hacer este límite holomorfo estamos perdiendo la propiedad de invariancia modular. El proceso de tomar la dependencia en t como dependencia funcional implica que estamos perdiendo la dependencia en la estructura compleja de base. En esta tesis hemos tomado el punto de vista en el que se considera que la dependencia en \bar{t} de Z_{top} define la estructura compleja de background en la que se “sitúan” las cuerdas cerradas. Desde este punto de vista podemos interpretar la descripción que da la polarización real de las amplitudes de la cuerda topológica como una descripción en un punto de base concreto: el punto del infinito. Por ello se puede decir que cada representación posible, incluso en polarización real, en la que se puede describir las amplitudes de la cuerda topológica viene dada en términos de una estructura compleja de base. La polarización no lineal parece no cumplir con esta característica, pero hemos visto que no es tratable más allá de la aproximación semiclásica.

No obstante, el hecho de que sea posible pasar de una representación a otra de forma unitaria nos invita a ser optimistas en cuanto a la posibilidad de que pueda hacerse alguna formulación independiente del background de la teoría de cuerdas topológicas. En efecto, es posible definir el estado independiente del background $|\psi_{\text{top}}\rangle$ en un espacio de Hilbert abstracto $\mathcal{H}_{\text{phys}}$ que contiene toda la información sobre las amplitudes de la cuerda topológica. Para alcanzar esta ansiada descripción independiente del background parece crucial entender cuál es el origen de la teoría de campos 7-dimensional de partida, qué significa el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\text{phys}}$ y qué papel juega en él $|\psi_{\text{top}}\rangle$.

Una forma en la que hemos intentado abordar físicamente estas cuestiones es estudiando la conexión entre la cuantización de H^3 y los agujeros negros CY. Hemos visto que todo el formalismo relacionado con la cuantización de H^3 tiene interpretación física en el contexto de estos agujeros negros si identificamos la 3-forma que estamos cuantizando con la 3-forma de cargas de estos agujeros negros. Más allá de la correspondencia formal hemos visto cómo podemos relacionar la entropía corregida de BHW en el caso supersimétrico con el estado $|\psi_{\text{top}}\rangle$ en polarización de Kähler. Las correcciones en \hbar tienen el significado de correcciones a la entropía en el inverso del cuadrado de la carga central. La polarización de Kähler está relacionada directamente con las funciones de distribución cuánticas de tipo Husimi. Esto nos ha permitido escribir la entropía de BHW y la función de partición mixta de OSV del agujero negro $Z_{\text{BH}}(p, \phi)$ en términos de la función de distribución cuántica de tipo Husimi/anti-Husimi mixta asociada a

$|\psi_{\text{top}}\rangle$ en el punto del atractor (ecs.(5.34) y (5.42)). Por otro lado es posible relacionar fácilmente $|\psi_{\text{top}}\rangle$ mediante una transformación unitaria con el estado “cosmológico” asociado a la cuantización radial del agujero negro (ec. (5.20)). Por tanto la expresión de $Z_{\text{BH}}(p, \phi)$ en términos de $|\psi_{\text{top}}\rangle$ se puede entender como una dualidad “cuerda abierta/cuerda cerrada” en el espacio blanco.

La polarización real, en cambio, está más directamente relacionada con la función de distribución de Wigner. Escribiendo la función de distribución de Husimi/anti-Husimi mixta en términos de la de Wigner hemos sido capaces de comparar la degeneración de microestados que postula OSV con la función de Wigner. La conclusión es que ambas funciones del espacio de fases son distintas en general. Sólo en el caso, considerado extensamente en la literatura, de que el punto del atractor esté situado en la región del infinito es posible escribir la degeneración de OSV como una función de Wigner. En este caso las correcciones que aporta OSV con respecto a la entropía de BHW tienen un significado físico claro: constituyen precisamente la información cuántica en el sector “x” del espacio de fases que la función de Husimi promedia mediante gaussianas en una aproximación de “punto grueso”. Sería interesante extender este análisis que hemos hecho usando las funciones de distribución como herramienta para comparar estas entropías que, aunque corregidas, se han obtenido en un análisis puramente macroscópico, con las funciones de partición microscópicas exactas (que incluyan también las configuraciones multicarga). Sólo entonces se podrían explotar a fondo las implicaciones en la correspondencia agujeros negros/cuerdas que tendría esta dualidad “cuerda abierta/cuerda cerrada” en el espacio blanco.

La segunda forma en la que hemos abordado el problema de la background-dependencia en cuerdas topológicas es estudiándola en un caso concreto de dualidad de “gran N”: la dualidad de Dijkgraaf-Vafa. Hemos llegado a las siguientes conclusiones:

- En el lado cerrado M_{def} de la dualidad⁸ es posible definir de forma independiente dos estados de la cuantización de $H^3(M_{\text{def}}, \mathbb{R})$:
 - El estado $|\psi_{\text{top}}\rangle$, que denotamos como $|\psi_{\text{closed}}\rangle$. Se define naturalmente como aquel cuya función de onda en polarización de Kähler en la base (X, \bar{X}) es igual a la función de partición de la cuerda topológica cerrada en el background (X, \bar{X}) . Ya hemos mencionado que la expansión en \hbar se interpreta, en esta identificación, como la expansión en género de la cuerda topológica.
 - El estado $|\psi_{\text{H}}\rangle$, que se define como aquel cuya función de onda en polarización lineal en la base simpléctica (A, B) es igual a cierta función de partición geométrica.

⁸Y, en general en cualquier CY local M_{H} descrito en términos de una curva hiperelíptica $H(x, y) = 0$ mediante la ecuación (6.114).

- En el lado abierto M_{res} , descrito por un modelo de matrices holomorfo, podemos asociar a la función de partición de las cuerdas abiertas un estado $|\psi_{\text{open}}\rangle$ de la cuantización de $H^3(M_{\text{def}}, \mathbb{R})$. Este estado se define como aquel cuya función de onda en polarización real en la base concreta de ciclos (A_o, B_o) es igual a la función de partición de las cuerdas abiertas ancladas en las branas. La expansión en \hbar se interpreta, en esta identificación, como la expansión en $1/N$.

Estos resultados nos permiten formular la conjetura de Dijkgraaf-Vafa de forma independiente del background como

$$|\psi_{\text{open}}\rangle = |\psi_{\text{closed}}\rangle \quad (6.162)$$

Dado que las amplitudes de cuerda cerrada constituyen una representación con una estructura compleja de base concreta en polarización de Kähler, y las de cuerda abierta constituyen una representación concreta en polarización real, podemos entender en este contexto el proceso de transición geométrica que lleva desde la geometría M_{res} , con branas, hasta M_{def} , sin branas, simplemente como un cambio de polarización. En el caso en el que $M_{\text{H}} = M_{\text{def}}$, se tiene que $|\psi_{\text{open}}\rangle = |\psi_{\text{H}}\rangle$, con lo que es natural conjeturar también que, en un CY local del tipo M_{H} ,

$$|\psi_{\text{H}}\rangle = |\psi_{\text{closed}}\rangle \quad (6.163)$$

independientemente de si este CY tiene asociado o no una transición geométrica.

En este escenario hemos analizado también el caso en el que se introducen branas no compactas. Estas branas no compactas dan lugar también a una dualidad cuerdas abiertas/cuerdas cerradas, que ha sido estudiada en detalle en el lado M_{def} en la ref. [122]. Hemos visto cómo se pueden obtener algunos de los resultados de la ref. [122] desde el lado M_{res} . Uno de estos resultados es que, al igual que ocurre en el caso compacto, también es posible interpretar la función de partición de las cuerdas abiertas ancladas en las branas no compactas como una función de onda, aunque en una cuantización distinta (ec. (6.139)). Sería interesante profundizar más en el estudio de la relación que hay entre ambos tipos de cuantización.

La ec. (6.162) nos dice que las amplitudes de las cuerdas topológicas abiertas y cerradas no son más que diferentes representaciones del mismo estado cuántico. Este estado cuántico tiene entidad de forma independiente del background, e independiente de si estamos situados en el lado abierto o cerrado de la dualidad. Esto nos lleva a ser todavía más optimistas en cuanto a la posibilidad de que pueda hacerse alguna formulación independiente del background de la teoría de cuerdas topológicas: esta formulación independiente del background parece ser incluso independiente del lado, abierto o cerrado, de la dualidad en el que estamos situados. Esto es precisamente lo que esperamos en cuanto a la relación entre una posible formulación de teoría M independiente del background y la correspondencia AdS/CFT: ambos lados de la corres-

pondencia son representaciones background-dependientes de la “teoría completa”, que es background-independiente.

Agradecimientos

En primer lugar, quisiera agradecer a César el haberme tomado como doctorando y el que me haya dado la oportunidad de trabajar con él todos estos años. Asimismo, estoy muy agradecido por el interés que está poniendo en ayudarme a conseguir un PostDoc y en que pueda seguir dedicándome a esta profesión, privilegio que, como todos sabemos, todavía sólo es accesible a unos pocos. Siguiendo en el terreno profesional también quiero agradecerle a Juan Pedro, mi hermano mayor científico, por eso precisamente, por haber sido un excelente hermano mayor y un excelente compañero de trabajo. He disfrutado y aprendido mucho de todas las horas de “curro” que hemos compartido juntos. Quiero también mostrar mi agradecimiento al Instituto de Física Teórica y al Departamento, como instituciones, por haberme facilitado el que haya podido realizar mis estudios de doctorado aquí, y, a nivel personal, además de a César, a Enrique Álvarez y Alfredo Poves por su ayuda en el tema de becas el primer año que vine a Madrid y que me ayudó a sobrevivir económicamente hasta que me concedieron la FPU. También quiero agradecerle a Enrique el que haya sido mi tutor en el programa de doctorado. Por el soporte económico de esta tesis, doy las gracias al Ministerio de Educación y Ciencia y a la Universidad Autónoma de Madrid.

Siguiendo en el terreno profesional, mi agradecimiento más especial es para todos los compañeros que han estado haciendo también el doctorado durante todos estos años, tanto los pocos que seguís en esto (¡mucho ánimo!) como los que os habeis visto obligados a dejarlo. Entre todos fuistes capaces de crear un ambiente humano y de compañerismo dignos de alabanza. No faltaba el día en el que, si alguno de nosotros necesitaba ayuda en lo que fuera, todos los demás se volcaban en prestar esa ayuda de forma desinteresada, con ánimo e ilusión. En definitiva, un ambiente cordial, agradable y acogedor en el que daba gusto trabajar. Ese fue el ambiente que me encontré al llegar al IFT y me ha supuesto una de las experiencias más enriquecedoras de mi vida. Con muchos de vosotros he podido compartir a lo largo de estos años experiencias que no olvidaré y, además, es mucha la física que he aprendido de todos vosotros. Por todo ello, gracias a (por orden alfabético) África, Alberto, Alicia, Ana, Andrés, Carlos (Hoyos), Dani (Cremades), Dani (López), Diego, Edu, Enrique, Ernesto (Arganda), Ernesto (Lozano), Fermín, Fouad, Guillermo, Irene, Javi, Jorge (Astur), Jorge (Bellorín), Jose, Juan, Juan Pedro, Juanjo, Lorenzo, también a Manolo (el “super” del building), Mateo,

Mechthild, Miguel Ángel, Natxo, Nico, Sara, Sergio, Olga, Pablo, Tomás... y a todos los demás, , y a Isabel, y a Patricia. Y gracias también a los que llegaron después: Antón, Carlos (Fuertes), Iñaki, Irene, Johan, etc..., con los que ha sido un placer compartir los últimos años de doctorado. A todos gracias, gracias y gracias. No hay institución de investigación en el mundo que llegue a la altura de vuestra valía profesional y personal.

Puestos a agradecer desde el principio, el primer agradecimiento es para los profesores que tuve en bachillerato en el Instituto Fidiana de Córdoba, que, además de ayudarme a crecer como persona, alimentaron en mí el interés por el conocimiento y fomentaron mi espíritu crítico. Mi agradecimiento también a la gente de la Universidad de Córdoba por haberse volcado con la docencia en la Licenciatura en Física (con el consiguiente beneficio que esto me trajo), en especial a: Néstor Armesto y Juan Antonio Caballero, por el excelente trato y los consejos que ámbos me dieron en su día referentes al doctorado, y a Vicente Colomer (que en paz descanse) por el excelente trato y por el grandísimo esfuerzo que hizo para transmitirme sus conocimientos. Aprendí muchísimo de él y eso es algo por lo que siempre le tendré en alta estima en mi memoria.

Quisiera dar las gracias también a la gente del Laboratorio de Física de Altas Energías de la Univ. Mohammed V de Rabat (Marruecos) por la hospitalidad recibida en las numerosas invitaciones que me han hecho para pasar unos días con ellos, en especial, a Adil Belhaj (y a su familia) y a El Hassan Saidi. Lo digo también en francés: je voudrais également remercier toutes les personnes du Laboratoire de Physique des Hautes Energies de l'Université Mohammed V de Rabat (Maroc) pour leur hospitalité, lors de leurs nombreuses invitations pour passer quelques jours parmi eux et tout spécialement, à Adil Belhaj (et sa famille), ainsi qu'à El Hassan Saidi (espero algún día también poder escribirlo en árabe). Adil se merece un agradecimiento aparte por toda la ayuda y consejos que he recibido de él y por todas las discusiones sobre física y matemáticas que hemos tenido durante este tiempo, tanto en la época en la que estuvo con nosotros en el IFT como posteriormente. También quiero agradecer a Sergio Montero, Marcos Mariño, Karl Landsteiner y Jorge Bellorín los comentarios y sugerencias que me hicieron cuando estaba terminando el último artículo.

Como veis, llevo ya mucho escrito, pero es lo que tiene llevar 5 años de doctorado y 5 de licenciatura en la universidad: hay mucho de lo que quejarse (cosa que no haré aquí), pero también hay mucho que agradecer. Además, estoy escuchando el "Vivo... para contarlo" de Fito, y a ritmo de rock and roll las palabras salen con mayor facilidad.

A caballo entre el ámbito profesional y el personal, quisiera dar las gracias a mis amigos del Instituto Ouróboros de Córdoba por todos los conocimientos y experiencias compartidas durante estos 7 años, por el excelente clima de colaboración que habeis creado y por alimentar en mí continuamente la pasión por el conocimiento. Seguiremos empeñados en defender que cada hombre, y mujer, es capaz de abrazar todas las

disciplinas humanas y que la distinción entre ciencias y humanidades es artificial.

En el ámbito personal el mayor agradecimiento es para mis padres y para Silvia. Papá, Mamá, sin vuestra ayuda, esfuerzo, cariño, dedicación y apoyo no hubiera tenido la oportunidad de realizar los estudios de licenciatura y doctorado que he querido. Es a vosotros a los que está dedicada esta tesis. Y a tí, Silvia, qué voy a decirte que no te haya dicho ya, que gracias por todo el cariño, apoyo y ánimo, y por hacer que cada día sea más maravilloso que el anterior. Gracias también a mi hermano Carlos y a mis abuelos; y también gracias a mis amigos, por ser eso, mis amigos. Pase lo que pase sé que siempre puedo contar con vosotros.

Apéndice A

Estados comprimidos y funciones de distribución cuánticas

En este apéndice revisamos brevemente algunas propiedades básicas de los estados comprimidos y las funciones de distribución cuánticas que se han utilizado en el presente trabajo. Para un análisis más detallado remitimos al lector a las referencias [117, 118].

A.1. Estados comprimidos

Dado un número real positivo ω , pueden definirse los correspondientes operadores aniquilación y creación como

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{q} + i\hat{p}) \quad (\text{A.1})$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{q} - i\hat{p}) \quad (\text{A.2})$$

de forma que ω se interpreta como la frecuencia asociada a un oscilador armónico de masa $m = 1$. Denotamos los correspondientes estados estacionarios de este oscilador como $|n\rangle_0$. A partir de \hat{a} y \hat{a}^\dagger podemos definir los operadores de aniquilación y creación generalizados

$$\hat{b} = \mu\hat{a} + \nu\hat{a}^\dagger \quad (\text{A.3})$$

donde $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ reciben el nombre de parámetros de deformación (squeezing parameters). Los estados comprimidos o estados coherentes generalizados se definen como los autoestados de \hat{b} . Los denotamos como $|\beta\rangle$, siendo β el autovalor correspondiente

$$\hat{b}|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle \quad (\text{A.4})$$

Estos estados existen y son normalizables para todo $\beta \in \mathbb{C}$ si $|\mu| - |\nu| > 0$. También puede verse que la dependencia en β , μ y ν viene dada enteramente en términos de los cocientes β/μ y ν/μ , con lo que podemos asumir que $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$ sin pérdida de generalidad. Esta condición implica que

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (\text{A.5})$$

El estado “vacío” $|0\rangle$, correspondiente a $\beta = 0$, puede determinarse a partir del estado fundamental del oscilador armónico $|0\rangle_0$ mediante la transformación de Bogoliubov

$$|0\rangle = \exp \left[-\frac{\nu}{2\mu} \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \right] |0\rangle_0 \quad (\text{A.6})$$

Físicamente se trata, al igual que $|0\rangle_0$, de un estado centrado en el punto $(0, 0)$ del espacio de fases ($\langle q \rangle = 0$, $\langle p \rangle = 0$) en el que el parámetro ω es proporcional a $(\Delta p)^2$ e inversamente proporcional a $(\Delta q)^2$. El efecto que introducen los parámetros de compresión es una modificación no correlacionada de las anchuras Δq y Δp , de tal forma que

$$\left. \begin{aligned} \Delta q &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} |\mu - \nu| \\ \Delta p &= \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} |\mu + \nu| \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\hbar}{2} \leq \Delta q \Delta p = \frac{\hbar}{2} |\mu^2 - \nu^2| \quad (\text{A.7})$$

El resto de estados comprimidos se pueden construir simplemente realizando un desplazamiento en el espacio de fases sobre $|0\rangle$ hasta centrar el estado en un punto (p, q) tal que

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} [\omega(\mu + \nu)q + i(\mu - \nu)p] \quad (\text{A.8})$$

con lo que las ecs. (A.7) siguen siendo válidas para $\beta \neq 0$. Esta transformación puede realizarse utilizando el operador unitario desplazamiento de Weyl

$$\hat{D}(p, q) = e^{\frac{i}{\hbar}(p\hat{q} - q\hat{p})} \quad (\text{A.9})$$

Por tanto

$$\begin{aligned} |\beta\rangle &= \hat{D}(p, q)|0\rangle = \exp \left[\beta \hat{b}^\dagger - \beta^* \hat{b} \right] |0\rangle = \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} e^{\beta \hat{b}^\dagger} |0\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

De esta última ecuación se tiene que

$$\hat{b}^\dagger |\beta\rangle = \left(\frac{1}{2}\beta^* + \frac{\partial}{\partial \beta} \right) |\beta\rangle \quad (\text{A.11})$$

y que los estados comprimidos así obtenidos están normalizados de forma que

$$\langle \beta_1^* | \beta_2 \rangle = \exp \left[\beta_1^* \beta_2 - \frac{1}{2} |\beta_1|^2 - \frac{1}{2} |\beta_2|^2 \right] \quad (\text{A.12})$$

Aunque estos estados no sean ortogonales sí que forman una base sobrecompleta del espacio de Hilbert

$$\mathbb{I} = \frac{1}{\pi} \int d\beta d\beta^* |\beta\rangle \langle \beta| \quad (\text{A.13})$$

con lo que todo estado $|\psi\rangle$ puede expresarse en la representación de estados comprimidos mediante la función de onda

$$\psi(\beta) = \langle \psi | \beta \rangle \quad (\text{A.14})$$

Obsérvese que esta función de onda depende adicionalmente de los parámetros de base ω , μ y ν elegidos para construir los estados comprimidos.

Las fórmulas (A.10), (A.11), (A.12) y (A.13) quedan modificadas si se elige la normalización

$$|\beta\rangle_{\text{bad}} = e^{\frac{1}{2}|\beta|^2} \beta \quad (\text{A.15})$$

En concreto

$$|\beta\rangle_{\text{bad}} = e^{\beta \hat{b}^\dagger} |0\rangle \quad (\text{A.16})$$

$$\hat{b}^\dagger |\beta\rangle_{\text{bad}} = \frac{\partial}{\partial \beta} |\beta\rangle_{\text{bad}} \quad (\text{A.17})$$

$${}_{\text{bad}} \langle \beta_1^* | \beta_2 \rangle_{\text{bad}} = e^{\beta_1^* \beta_2} \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbb{I} = \frac{1}{\pi} \int d\beta d\beta^* |\beta\rangle_{\text{bad}} e^{-|\beta|^2} \langle \beta |_{\text{bad}} \quad (\text{A.19})$$

En el caso particular de que $\nu = 0$ los estados $|\beta\rangle$ pasan a ser los autoestados de \hat{a} y se les denomina “estados coherentes”. Obsérvese que son los que saturan la relación de incertidumbre.

A.2. Funciones de distribución cuánticas

Sea $|\psi\rangle$ un estado cuántico. Se puede asociar a este estado una función de distribución cuántica $F(p, q)$ como una función en el espacio de fases a partir de la cual se puede obtener el valor esperado de cualquier observable cuántico $\hat{A}(\hat{p}, \hat{q})$ en el estado $|\psi\rangle$ mediante el promedio

$$\langle \psi | \hat{A}(\hat{p}, \hat{q}) | \psi \rangle = \int dq dp A(p, q) F(p, q) \quad (\text{A.20})$$

En esta fórmula $A(p, q)$ es el observable clásico asociado con $\hat{A}(\hat{p}, \hat{q})$. Dado que cuánticamente \hat{q} y \hat{p} no conmutan, hay infinitas formas distintas de definir el mapa $A(p, q) \rightarrow \hat{A}(\hat{p}, \hat{q})$, cada una de las cuales corresponde a una función de distribución cuántica

distinta. Cada una de estas prescripciones de ordenamiento de operadores viene determinada por una función núcleo (kernel function) $f(\xi, \eta)$ distinta, definida por la asignación

$$e^{\frac{i}{\hbar}(\xi q - \eta p)} \rightarrow f(\xi, \eta) e^{\frac{i}{\hbar}(\xi \hat{q} - \eta \hat{p})} \quad (\text{A.21})$$

La función en el espacio de fases $A^f(p, q)$ asociada al observable $\hat{A}(\hat{p}, \hat{q})$ viene entonces dada por

$$A^f(p, q) = \frac{1}{2\pi} \int d\xi d\eta \frac{\tilde{A}(\xi, \eta)}{f(\xi, \eta)} e^{\frac{i}{\hbar}(\xi q - \eta p)} \quad (\text{A.22})$$

donde $\tilde{A}(\xi, \eta)$ son los coeficientes de la expansión de Fourier

$$\hat{A}(\hat{p}, \hat{q}) = \frac{1}{2\pi} \int d\xi d\eta \tilde{A}(\xi, \eta) e^{\frac{i}{\hbar}(\xi \hat{q} - \eta \hat{p})} \quad (\text{A.23})$$

y la función de distribución cuántica correspondiente es

$$F^f(p, q) = \frac{1}{4\pi^2} \int d\xi d\eta \langle \psi | f(\xi, \eta) e^{\frac{i}{\hbar}(\xi \hat{q} - \eta \hat{p})} | \psi \rangle e^{-\frac{i}{\hbar}(\xi q - \eta p)} \quad (\text{A.24})$$

A.2.1. Función de Wigner

La función de Wigner es aquella que viene determinada por el ordenamiento de Weyl, que es aquel en el que la función núcleo es la unidad

$$f^W = 1 \quad (\text{A.25})$$

Esto implica que $A^W(p, q)$ es la función de Weyl asociada al operador $\hat{A}(\hat{p}, \hat{q})$

$$A^W(p, q) = 2 \int dq' \langle q + q' | \hat{A}(\hat{p}, \hat{q}) | q - q' \rangle e^{-2\frac{i}{\hbar} q' p} \quad (\text{A.26})$$

y que la función de Wigner es la función de Weyl asociada al operador densidad $|\psi\rangle\langle\psi|$

$$F^W(p, q) = \frac{1}{\pi\hbar} \int dq' \langle q + q' | \psi \rangle \langle \psi | q - q' \rangle e^{-2\frac{i}{\hbar} q' p} \quad (\text{A.27})$$

Podemos expresar la función de Wigner equivalentemente como el valor medio del operador paridad \hat{P} en el estado $\hat{D}(p, q)|\psi\rangle$

$$F^W(p, q) = \frac{1}{\pi\hbar} \langle \psi | \hat{D}^\dagger(p, q) \hat{P} \hat{D}(p, q) | \psi \rangle \quad (\text{A.28})$$

De esta última expresión se observa explícitamente que $F^W(p, q) \in [-\frac{1}{\pi\hbar}, +\frac{1}{\pi\hbar}]$ es una función real, pero no definido-positiva.

A.2.2. Función de Husimi

La función de distribución de Husimi es la correspondiente a un ordenamiento antinormal con respecto a los operadores aniquilación generalizados \hat{b} . Por tanto

$$f^H(\xi, \eta) = e^{-\frac{|\beta(\xi, \eta)|^2}{2}} \quad (\text{A.29})$$

donde

$$\beta(\xi, \eta) = \mu \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\eta + i\xi) + \nu \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\eta - i\xi) \quad (\text{A.30})$$

Dado que

$$\hat{D}(p, q) = e^{\beta(p, q)\hat{b}^\dagger - \beta^*(p, q)\hat{b}} \quad (\text{A.31})$$

sea cual sea ω, μ, ν , se tiene

$$F^H(p, q) = \frac{1}{4\pi^2} \int d\xi d\eta \langle \psi | e^{-\beta^*(\xi, \eta)\hat{b}} e^{\beta(\xi, \eta)\hat{b}^\dagger} | \psi \rangle e^{-\frac{i}{\hbar}(\xi q - \eta p)} \quad (\text{A.32})$$

A partir de esta última expresión es directo derivar la relación entre esta función de distribución y F^W

$$F^H(p, q) = \frac{1}{\pi\hbar} \int dq' dp' F^W(p', q') e^{-2|\beta(p, q) - \beta(p', q')|^2} \quad (\text{A.33})$$

Esta expresión nos dice que F^H se obtiene a partir de F^W mediante un proceso de promedio o “difuminado” en el espacio de fases mediante gaussianas con anchura y parámetros de deformación dados por ω, μ, ν . Este proceso de “promedio” es similar al efecto de promedio en “punto gordo” inherente a toda medición experimental. Si introducimos la relación de sobrecompletitud de los estados comprimidos (A.13) en la ec. (A.32), es directo encontrar que esta aproximación de punto gordo da lugar a una función definido-positiva

$$F^H(p, q) = \frac{1}{2\pi\hbar} |\langle \psi | \beta \rangle|^2 \quad (\text{A.34})$$

A.2.3. Función de Anti-Husimi

Por el contrario, la función de distribución de Anti-Husimi corresponde a un ordenamiento normal con respecto a los operadores de aniquilación y creación generalizados:

$$f^{AH}(\xi, \eta) = e^{+\frac{|\beta(\xi, \eta)|^2}{2}} \quad (\text{A.35})$$

$$F^{AH}(p, q) = \frac{1}{4\pi^2} \int d\xi d\eta \langle \psi | e^{\beta(\xi, \eta)\hat{b}^\dagger} e^{-\beta^*(\xi, \eta)\hat{b}} | \psi \rangle e^{-\frac{i}{\hbar}(\xi q - \eta p)} \quad (\text{A.36})$$

A partir de la expresión (A.36) y de (A.24), particularizada para la función de Wigner, es posible obtener

$$F^W(p, q) = \frac{1}{\pi\hbar} \int dq' dp' F^{AH}(p', q') e^{-2|\beta(p, q) - \beta(p', q')|^2} \quad (\text{A.37})$$

En palabras, ahora es F^W la que se obtiene a partir de F^{AH} mediante un “difuminado de punto gordo”, también con anchura y parámetros de deformación dados por ω, μ, ν .

Apéndice B

Geometría cuántica en las teorías de cuerdas minimales

Como hemos mencionado en la introducción, uno de los principales retos que se plantea la teoría de cuerdas es entender cuánticamente la geometría y la dinámica del espacio blanco y hasta qué punto los conceptos clásicos de espacio y tiempo se pueden extender cuánticamente. Para ello es necesario un mayor conocimiento de los aspectos no perturbativos de la teoría. En este contexto se hace interesante estudiar la naturaleza del espacio blanco en teorías que constituyan modelos simplificados de las teorías de cuerdas físicas. En este apéndice resumimos algunos aspectos del trabajo [19, 22] en el que se realiza este estudio para una clase de teorías de cuerdas no críticas en las que el sector de materia tiene carga central menor que 1, en concreto, las teorías de cuerdas minimales. Estas teorías, cuya descripción perturbativa (en la hoja de mundo) viene dada en términos de una teoría conforme minimal acoplada a la teoría de campos de Liouville, constituyen ejemplos importantes de modelos de gravedad cuántica que es posible resolver de forma exacta.

El procedimiento por el que fueron resueltos exactamente a principio de los años 90 fue mediante una descripción no perturbativa dada por el límite continuo (“double-scaling limit”) de un modelo de matrices [134]. La idea es que cada “diagrama gordo” del modelo de matrices con género g y h agujeros puede entenderse como una poligonización de la hoja de mundo Σ_g de la cuerda minimal, de forma que la suma sobre topologías y sobre métricas de la hoja de mundo puede escribirse como una suma sobre todas las posibles poligonizaciones. Si hacemos ahora el límite (“double scaling limit”) de N grande y al mismo tiempo hacemos tender los coeficientes del potencial a un valor crítico g_c , entonces el número de polígonos tiende a infinito manteniéndose el área total constante a cada género. Se trata, por tanto, de un límite continuo, en el que la energía libre del modelo de matrices tiene contribuciones a todos los géneros y se corresponde con la función de partición de la gravedad cuántica bidimensional de la

hoja de mundo. Existen multitud de evidencias no triviales en el cálculo de exponentes críticos, observables macroscópicos y funciones de correlación que nos indican que este procedimiento nos proporciona una descripción no perturbativa de las cuerdas minimales. No obstante, a pesar su simplicidad, las cuerdas minimales contienen muchos de los aspectos interesantes de las cuerdas críticas tales como branas y dualidades cuerda abierta/cuerda cerrada. Además, en los últimos años estas teorías han recibido de nuevo gran atención debido a los progresos que se han alcanzado en el estudio de la teoría del campo de Liouville [135]. Esto ha permitido que se puedan hacer comparaciones interesantes entre las dos descripciones, perturbativa y no-perturbativa [136–138].

Debido al hecho de que la carga central correspondiente al contenido de materia es menor que 1, no es posible en estos modelos una interpretación directa de cuál es el espacio blanco. No obstante, se ha propuesto que toda la información sobre el espacio blanco está codificada en la dinámica de las branas FZZT [138]. En este apéndice usamos el análisis de la sección 6.4 referente a la relación entre los modelos de matrices y la cuantización de la curva $H(x, y) = 0$ para estudiar las correcciones cuánticas sobre el espacio blanco de las cuerdas minimales de tipo $(2, q)$. La idea es que podemos relacionar las amplitudes asociadas a las branas FZZT con la mecánica cuántica de $H(x, y)$. Mediante este procedimiento el espacio blanco clásico se puede interpretar como una curva en el espacio de fases del modelo mecánico, de tal forma que es posible derivar los efectos cuánticos sobre el espacio blanco a partir de mecánica semiclásica en el espacio de fases que nos proporciona el formalismo de la función de Wigner. Esto nos permite interpretar el proceso del límite continuo mencionado en el párrafo anterior como un proceso de resolución cuántica en el espacio de fases.

B.1. Branas FZZT y el espacio blanco clásico de la cuerda minimal

Comencemos recordando brevemente cuál es la descripción en la hoja de mundo de las teorías de cuerdas minimales de tipo $(2, q)$. El sector de materia viene dado por la teoría conforme minimal correspondiente, con carga central $c_m = 1 - \frac{3(2-q)^2}{q} < 1$. Por otro lado el sector de Liouville, la teoría para el campo de Liouville ϕ , viene dado por la acción

$$S_{LFT} = \frac{1}{4\pi} \int \sqrt{g} [\partial\phi\partial\phi + Q\phi R + 4\pi\mu e^{2b\phi}] \quad (\text{B.1})$$

donde b es la constante de acoplo de Liouville, $Q = \frac{1}{b} + b$ es la carga de background y μ es la constante cosmológica en la hoja de mundo. Como $c_m < 1$, lo único que se puede decir a primera vista acerca del espacio blanco es que viene dado por la dirección de Liouville ϕ . Además del hecho de que no hay tiempo, este espacio blanco tiene de especial que no es homogéneo. El hecho de que $Q \neq 0$ implica que el acoplo de la cuerda

efectivo varía exponencialmente con ϕ , de tal forma que en $\phi \rightarrow -\infty$ las cuerdas son libres, mientras que en $\phi \rightarrow +\infty$ las cuerdas están fuertemente acopladas. Además, el término $-\mu$ en la acción (B.1) suprime fuertemente las contribuciones a la integral de camino en las que ϕ es positiva y grande, teniéndose de forma efectiva una pared, denominada “pared de Liouville”.

El punto de vista que tomamos en este trabajo es que podemos tener una mejor descripción efectiva del espacio blanco mediante el espacio de moduli de las branas FZZT. Desde el punto de vista de la hoja de mundo estas branas se implementan considerando hojas de mundo con agujeros con condiciones de frontera de tipo Neumann para ϕ , con un término de interacción de frontera en la acción de la forma $\oint \mu_B e^{b\phi}$, donde μ_B es una constante cosmológica de frontera. Este término suprime las contribuciones a la integral de camino en las que la frontera de la cuerda está más allá de $\phi = -\frac{1}{b} \log \mu_B$. Esto nos permite interpretar μ_B como una coordenada en el espacio blanco. Los progresos recientes en la teoría del campo de Liouville con frontera han permitido calcular [136] la amplitud de disco asociada a la FZZT $\Phi(\mu_B)$. En este cálculo puede verse que es posible considerar todos los tipos de FZZT branas si complexificamos el parámetro μ_B . Si definimos $x = \frac{\mu_B}{\mu}$ y $y = \frac{1}{\mu^{1/2+1/(2b^2)}} \partial_x \Phi$, se encuentra que el Φ calculado satisface la relación

$$H(x, y) := 2y^2 - 1 - T_q(x) = 0 \quad (\text{B.2})$$

donde T_q son los polinomios de Chebyshev de primera clase. La relación (B.2) define una superficie de Riemann que, al igual que las estudiadas en la sección 6.1, también tiene la estructura de un recubrimiento doble sobre el plano complejo x . En la ref. [136] se interpreta esta superficie como el espacio blanco clásico de la teoría. En este contexto Φ puede interpretarse geoméricamente como la integral $\Phi(x) = \int^x y(x') dx'$ de la 1-forma Ω en un contorno con punto final determinado por μ_B .

B.2. Cuerdas minimales y la cuantización de $H(x, y)$

La pregunta en este punto es si las correcciones en el acoplo de la cuerda minimal g_{\min} modifican significativamente este espacio blanco. Para ello utilizamos la descripción no perturbativa. Ésta viene dada por el límite continuo de un modelo de matrices (6.14) en el que el potencial es elegido de tal manera que el modelo de matrices tenga el mismo comportamiento de exponente crítico que la cuerda minimal $(2, q)$. Hemos visto en la sección 6.4 que es posible, a partir de los polinomios ortonormales P_n del modelo de matrices, definir un conjunto completo de estados $|\psi_n\rangle$ de la cuantización de $H(x, y)$, donde el acoplo del modelo de matrices g_s juega el papel de constante de Planck. También hemos visto que es posible expresar todo correlador del modelo de matrices como un valor medio cuántico asociado al estado mixto $\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} |\psi_n\rangle \langle \psi_n|$. En particular, el valor medio de la traza del resolvente viene dado por la expresión

(6.157). Por tanto, podemos decir que este estado mixto mecano-cuántico contiene la misma información que el modelo de matrices.

Podemos pensar en el estado mixto $\hat{\rho}$ como un estado de equilibrio. Es entonces natural pensar en los estados $|\psi_n\rangle$ como estados estacionarios de cierto hamiltoniano. Podemos obtener cierta información sobre este hamiltoniano de hecho de que

$$\psi_N(x) \propto e^{-\frac{W(x)}{2g_s}} \langle \det(x - M) \rangle \quad (\text{B.3})$$

Por un lado, a g_s pequeño se tiene

$$\psi_N(x) \simeq \exp \left[-\frac{1}{2g_s} \int^x y(x') dx' \right] \quad (\text{B.4})$$

Por otro, a primer orden en la expansión WKB

$$\psi_N(x) \propto e^{-\frac{1}{2g_s} \int^x y(x', E_N) dx'} \quad (\text{B.5})$$

Esto da lugar a un mapa formal entre el modelo de matrices y un sistema mecánico acotado en el que el valor medio del resolvente juega el papel de una curva cerrada en el espacio de fases

$$y(x, E_N) = W'(x) - 2t\omega_0(x) \quad (\text{B.6})$$

Como ejemplo más simple podemos considerar la cuerda minimal $(2, 1)$, a la que se le puede asociar el modelo de matrices más sencillo: el gaussiano. El sistema mecánico asociado es, en este caso, simplemente el oscilador armónico, donde $y(x, E_N) = \pm i\sqrt{E_N - x^2}$.

El límite continuo implica, para el modelo de matrices, un “zoom” en el borde de la distribución de autovalores. Mediate el mapa (B.6), esto corresponde, desde el punto de vista del sistema mecánico, a un “zoom” en el punto de retorno clásico, de tal forma que tras tomar éste límite el sistema se vuelve no-acotado. y el parámetro que juega ahora el papel de constante de Planck es ahora g_{\min} . El mapa (B.6) también implica que la integral del resolvente es el valor medio, en el modelo de matrices, del operador “lazo macroscópico” $\text{Tr} \log(x - M)$, y este es precisamente el operador que implementa la brana FZZT en la descripción no perturbativa de la cuerda minimal. Por tanto, podemos mapear la curva clásica en el espacio de fases de energía $E = 0$ del sistema no acotado con la superficie de Riemann (B.2). La utilidad de este mapa viene del hecho de que va más allá de la simple identificación clásica en el sentido de que podemos obtener todos los efectos en g_{\min} (perturbativos y no-perturbativos) a partir de los efectos cuánticos en el análogo mecánico. Por ejemplo, la función de partición Z_{FZZT} de la FZZT brana a todo género, que se corresponde en la descripción no perturbativa con el valor medio del operador (6.145) es mapeado, tras la aplicación del límite continuo, con la función de onda $\psi_{E=0}$ del modelo mecánico. Ésta, que es la función de Baker-Akhiezer de la jerarquía KP, es una función entera de x . Por tanto, se puede decir que, debido a los efectos cuánticos, el espacio blanco de la cuerda minimal no es la superficie de Riemann (B.2), sino el plano complejo x .

Otro tipo de branas que existen en la teoría de cuerdas minimales son las ZZ branas. Éstas se definen como D-branas localizadas en la región de acoplo grande $\phi \rightarrow \infty$. En el modelo $(2, 2k - 1)$ hay $k - 1$ tipos de ZZ branas, que se denotan por $(1, l)$, con $l = 1, \dots, k - 1$. Estos tipos de ZZ branas corresponden con las $k - 1$ singularidades $x_{1,l}$ de la curva (B.2), de tal forma que la amplitud de anillo correspondiente a una ZZ brana del tipo $(1, l)$ se interpreta geoméricamente como la integral de la 1-forma Ω en torno al B-ciclo que pasa por la singularidad $x_{1,l}$. Estas singularidades se corresponden con A-ciclos colapsados, de tal manera que los periodos $\int_A \Omega$ son iguales a cero. La SFT asociada a las ZZ branas no es más que el modelo de matrices en el límite continuo. Por tanto, desde el punto de vista de la descripción no perturbativa, la teoría de cuerdas minimales en un background con n_l ZZ branas del tipo $(1, l)$ viene descrita también por el límite continuo del modelo de matrices, pero en un vacío en el que hay n_l autovalores en el extremo $(1, l)$ del potencial. La presencia de estas ZZ branas modifica la curva (B.2)

$$\delta y^2 = -2^{2k-3} \sum_{l=1}^{k-1} g_{\min} n_l \sqrt{x_{1,l} + 1} \prod_{n \neq l} (x - x_{1,n}) \quad (\text{B.7})$$

de tal forma que los periodos $\int_A \Omega$ son ahora distintos de cero. De acuerdo con los resultados de la sección 6.2 tenemos la función de partición $Z_{ZZ}(n_l)$ puede interpretarse también como una función de onda, pero de otra cuantización: la de $H^3(M_H, \mathbb{R})$ (en polarización real). Hemos indicado en la sección 6.4 que de la interacción entre ambas cuantizaciones es posible obtener una regla de cuantización para los periodos $\int_A \Omega$. Esta regla de cuantización se traduce en este caso en que el número de ZZ branas ha de ser discreto. Es destacable que esta regla de cuantización nos permite obtener el factor de proporcionalidad exacto entre la constante de Planck g_s de la cuantización de $H(x, y)$ y g_{\min} .

Como ejemplo, podemos considerar las deformaciones de ZZ brana para el modelo $(2, 5)$

$$y^2 = 8 \left[(x + 1)(x - x_{1,1})^2(x - x_{1,2})^2 - g_{\min} n_2 \sqrt{x_{1,2} + 1} (x - x_{1,1}) \right] \quad (\text{B.8})$$

con $x_{1,1} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ y $x_{1,2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Si consideramos que la deformación es pequeña $g_{\min} n_2 \ll 1$, y hacemos una expansión en torno al mínimo $x_{1,2}$,

$$y^2 \approx -\omega_1 g_{\min} n_2 + \frac{\omega_2^2}{4} (x - x_{\min})^2 \quad (\text{B.9})$$

con $\omega_1 \simeq \omega_2 \simeq 12,3$. El nivel $E = 0$ satisface la regla de cuantización de Böhr-Sommerfeld sólo si

$$\omega_1 g_{\min} n_2 = g_s \omega_2 n \quad (\text{B.10})$$

de donde se obtiene que n_2 es un número natural y que

$$\frac{g_s}{g_{\min}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \simeq 1 \quad (\text{B.11})$$

B.3. Catástrofes y el límite continuo

La forma en la que podemos entender qué ocurre cuánticamente con el espacio blanco clásico (B.2) es estudiando las correcciones cuánticas sobre la función de Wigner $F_{E=0}^W(p, q)$ asociada al estado $\psi_{E=0}$. Como en $\hbar \rightarrow 0$ $F_{E=0}^W(y, x)$ tiende a una función delta con soporte sobre la curva clásica $E = 0$, podemos tomar como definición del espacio blanco de la cuerda minimal el soporte de $F_{E=0}^W(y, x)$. En efecto, si intentamos calcular $F_E^W(y, x)$, mediante la expresión (A.27), a partir de la aproximación WKB de ψ_E y haciendo aproximación de punto de silla en la integral, el resultado es una expresión que diverge sobre la curva clásica [139]. Matemáticamente, tenemos una catástrofe de pliegue sobre los puntos de la curva. Si queremos calcular la función de partición de la FZZT brana, por ejemplo, mediante la integración

$$|\psi_E(x)|^2 = \int ds F_E^W(-iy(x(s)), x) \quad (\text{B.12})$$

es necesario previamente, para poder hacer el “zoom” en torno al punto de retorno clásico, resolver esta catástrofe. Por ejemplo, en el modelo $(2, 1)$ el hacer la aproximación uniforme para la función de Wigner del sistema mecánico acotado, el zoom posterior y la integración da

$$\psi_{E=0} = Ai\left(\frac{x+1}{2^{1/3}\hbar^{2/3}}\right) \quad (\text{B.13})$$

que es la misma función de partición que puede obtenerse a partir del límite continuo del modelo de matrices. En el caso de los modelos $(2, 2k-1)$ con $k > 1$ la resolución de la catástrofe es más complicada debido al hecho de que el punto de retorno clásico es de orden más alto, pero la conclusión es la misma: el significado del límite continuo es la resolución cuántica de la catástrofe sobre la curva clásica en el espacio de fases, concretamente en el punto de retorno. Además, la función de Wigner resuelta para el sistema no-acotado tiene genéricamente un comportamiento oscilatorio en la parte convexa del espacio de fases, y es exponencialmente decreciente en la parte cóncava. Dado que, una vez resuelta la catástrofe, el soporte de la función de Wigner es todo el espacio de fases, la otra conclusión que se tiene es que el efecto de las correcciones cuánticas sobre el espacio blanco no es cambiar la forma de la curva (B.2), sino difuminarla en un espacio (x, y) no conmutativo. Para un análisis detallado de estas cuestiones remitimos al lector a la tesis [22].

Bibliografía

- [1] G. 't Hooft, “A Planar Diagram Theory For Strong Interactions,” Nucl. Phys. B **72** (1974) 461.
- [2] G. T. Horowitz and J. Polchinski, “A correspondence principle for black holes and strings,” Phys. Rev. D **55** (1997) 6189 [arXiv:hep-th/9612146].
- [3] A. Strominger and C. Vafa, “Microscopic Origin of the Bekenstein-Hawking Entropy,” Phys. Lett. B **379** (1996) 99 [arXiv:hep-th/9601029].
- [4] J. M. Maldacena, “The large N limit of superconformal field theories and supergravity,” Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231 [Int. J. Theor. Phys. **38** (1999) 1113] [arXiv:hep-th/9711200].
- [5] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, “Gauge theory correlators from non-critical string theory,” Phys. Lett. B **428** (1998) 105 [arXiv:hep-th/9802109].
- [6] E. Witten, “Anti-de Sitter space and holography,” Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 253 [arXiv:hep-th/9802150].
- [7] G. 't Hooft, “Dimensional reduction in quantum gravity,” arXiv:gr-qc/9310026. L. Susskind, “The World as a hologram,” J. Math. Phys. **36** (1995) 6377 [arXiv:hep-th/9409089].
- [8] P. Kraus, “Lectures on black holes and the AdS(3)/CFT(2) correspondence,” arXiv:hep-th/0609074.
- [9] J. M. Maldacena, A. Strominger and E. Witten, “Black hole entropy in M-theory,” JHEP **9712**, 002 (1997) [arXiv:hep-th/9711053].
- [10] H. Ooguri, A. Strominger and C. Vafa, “Black hole attractors and the topological string,” Phys. Rev. D **70**, 106007 (2004) [arXiv:hep-th/0405146].
- [11] E. Witten, “TOPOLOGICAL GRAVITY,” Phys. Lett. B **206** (1988) 601. E. Witten, “TOPOLOGICAL SIGMA MODELS,” Commun. Math. Phys. **118** (1988) 411. E. Witten, “TOPOLOGICAL QUANTUM FIELD THEORY,” Commun.

- Math. Phys. **117** (1988) 353. E. Witten, “ON THE STRUCTURE OF THE TOPOLOGICAL PHASE OF TWO-DIMENSIONAL GRAVITY,” Nucl. Phys. B **340** (1990) 281. E. Witten, “Introduction To Cohomological Field Theories,” Int. J. Mod. Phys. A **6** (1991) 2775. E. Witten, “Mirror manifolds and topological field theory,” arXiv:hep-th/9112056. E. Witten, “Chern-Simons Gauge Theory As A String Theory,” Prog. Math. **133** (1995) 637 [arXiv:hep-th/9207094].
- [12] E. Witten, “Quantum background independence in string theory,” arXiv:hep-th/9306122.
- [13] M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri and C. Vafa, “Holomorphic anomalies in topological field theories,” Nucl. Phys. B **405** (1993) 279 [arXiv:hep-th/9302103].
- [14] M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri and C. Vafa, “Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes,” Commun. Math. Phys. **165** (1994) 311 [arXiv:hep-th/9309140].
- [15] R. Gopakumar and C. Vafa, “On the gauge theory/geometry correspondence,” Adv. Theor. Math. Phys. **3** (1999) 1415 [arXiv:hep-th/9811131].
- [16] H. Ooguri and C. Vafa, “Worldsheet derivation of a large N duality,” Nucl. Phys. B **641** (2002) 3 [arXiv:hep-th/0205297].
- [17] R. Dijkgraaf and C. Vafa, “Matrix models, topological strings, and supersymmetric gauge theories,” Nucl. Phys. B **644** (2002) 3 [arXiv:hep-th/0206255].
- [18] H. Ooguri, C. Vafa and E. P. Verlinde, “Hartle-Hawking wave-function for flux compactifications,” Lett. Math. Phys. **74**, 311 (2005) [arXiv:hep-th/0502211].
- [19] C. Gómez, S. Montañez and P. Resco, “Semi-classical mechanics in phase space: The quantum target of minimal strings,” JHEP **0511** (2005) 049 [arXiv:hep-th/0506159].
- [20] C. Gómez and S. Montañez, “A comment on quantum distribution functions and the OSV conjecture,” JHEP **0612** (2006) 069 [arXiv:hep-th/0608162].
- [21] S. Montañez, “Geometric Transition as a Change of Polarization,” arXiv:0705.2980 [hep-th].
- [22] P. Resco, “Sobre la Geometría en las Teorías de Cuerdas Minimales,” PhD Thesis, Departamento de Física Teórica, Universidad Autónoma de Madrid, Spain (2006).
- [23] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, “Superstring Theory. Vol. 1: Introduction,” M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, “Superstring Theory. Vol. 2: Loop Amplitudes, Anomalies And Phenomenology,” D. Lust and S. Theisen, “Lectures On String Theory,” Lect. Notes Phys. **346** (1989) 1. J. Polchinski, “String

- theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string,” J. Polchinski, “String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond,”
- [24] J. Polchinski, “Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges,” *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 4724 [arXiv:hep-th/9510017].
- [25] C. V. Johnson, “D-brane primer,” arXiv:hep-th/0007170.
- [26] R. G. Leigh, “Dirac-Born-Infeld Action From Dirichlet Sigma Model,” *Mod. Phys. Lett. A* **4** (1989) 2767.
- [27] M. R. Douglas, “Branes within branes,” arXiv:hep-th/9512077. M. Li, “Boundary States of D-Branes and Dy-Strings,” *Nucl. Phys. B* **460** (1996) 351 [arXiv:hep-th/9510161].
- [28] J.J.Brey, J.de la Rubia Pacheco, J.de la Rubia Sánchez, “Mecánica Estadística,”
- [29] L. Susskind, “Some Speculations About Black Hole Entropy In String Theory,” arXiv:hep-th/9309145.
- [30] G. T. Horowitz, “Quantum states of black holes,” arXiv:gr-qc/9704072.
- [31] G. T. Horowitz and A. Strominger, “Black strings and P-branes,” *Nucl. Phys. B* **360** (1991) 197.
- [32] J. M. Maldacena, “Black holes in string theory,” arXiv:hep-th/9607235.
J. M. Maldacena, “Black holes and D-branes,” *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **61A** (1998) 111 [*Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **62** (1998) 428] [arXiv:hep-th/9705078].
S. R. Das and S. D. Mathur, “The Quantum Physics Of Black Holes: Results From String Theory,” *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **50** (2000) 153 [arXiv:gr-qc/0105063].
T. Mohaupt, “Black holes in supergravity and string theory,” *Class. Quant. Grav.* **17** (2000) 3429 [arXiv:hep-th/0004098].
- [33] D. E. Berenstein, J. M. Maldacena and H. S. Nastase, “Strings in flat space and pp waves from $N = 4$ super Yang Mills,” *JHEP* **0204** (2002) 013 [arXiv:hep-th/0202021].
- [34] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, “A semi-classical limit of the gauge/string correspondence,” *Nucl. Phys. B* **636** (2002) 99 [arXiv:hep-th/0204051].
- [35] A. A. Tseytlin, “Spinning strings and AdS/CFT duality,” arXiv:hep-th/0311139.
- [36] I. R. Klebanov, “World-volume approach to absorption by non-dilatonic branes,” *Nucl. Phys. B* **496** (1997) 231 [arXiv:hep-th/9702076].

- [37] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. A. Tseytlin, “String theory and classical absorption by three-branes,” Nucl. Phys. B **499** (1997) 217 [arXiv:hep-th/9703040].
- [38] L. Susskind and E. Witten, “The holographic bound in anti-de Sitter space,” arXiv:hep-th/9805114.
- [39] P. Candelas, “LECTURES ON COMPLEX MANIFOLDS,” IN **TRIESTE 1987, PROCEEDINGS, SUPERSTRINGS '87** 1-88.
- [40] M. Nakahara, “Geometry, topology and physics,” *Boca Raton, USA: Taylor and Francis (2003)* 573 p
- [41] B. de Wit, P. G. Lauwers and A. Van Proeyen, “Lagrangians Of N=2 Supergravity - Matter Systems,” Nucl. Phys. B **255** (1985) 569.
- [42] T. Ortín, “Gravity And Strings,” *Cambridge University Press, 2004*
- [43] S. Ferrara, G. W. Gibbons and R. Kallosh, “Black holes and critical points in moduli space,” Nucl. Phys. B **500**, 75 (1997) [arXiv:hep-th/9702103].
- [44] K. Goldstein, N. Iizuka, R. P. Jena and S. P. Trivedi, “Non-supersymmetric attractors,” Phys. Rev. D **72**, 124021 (2005) [arXiv:hep-th/0507096].
- [45] P. K. Tripathy and S. P. Trivedi, “Non-supersymmetric attractors in string theory,” JHEP **0603**, 022 (2006) [arXiv:hep-th/0511117].
- [46] R. Kallosh, N. Sivanandam and M. Soroush, “The non-BPS black hole attractor equation,” JHEP **0603**, 060 (2006) [arXiv:hep-th/0602005].
- [47] K. Saraikin and C. Vafa, “Non-supersymmetric Black Holes and Topological Strings,” arXiv:hep-th/0703214.
- [48] S. Bellucci, S. Ferrara and A. Marrani, “On some properties of the attractor equations,” Phys. Lett. B **635** (2006) 172 [arXiv:hep-th/0602161].
- [49] S. Bellucci, S. Ferrara, A. Marrani and A. Yeranyan, “Mirror Fermat Calabi-Yau Threefolds and Landau-Ginzburg Black Hole Attractors,” Riv. Nuovo Cim. **029** (2006) 1 [arXiv:hep-th/0608091].
- [50] G. W. Moore, “Arithmetic and attractors,” arXiv:hep-th/9807087.
- [51] S. Ferrara, R. Kallosh and A. Strominger, “N=2 extremal black holes,” Phys. Rev. D **52** (1995) 5412 [arXiv:hep-th/9508072].
- [52] A. Strominger, “Macroscopic Entropy of $N = 2$ Extremal Black Holes,” Phys. Lett. B **383** (1996) 39 [arXiv:hep-th/9602111].

- [53] G. W. Moore, “Les Houches lectures on strings and arithmetic,” arXiv:hep-th/0401049.
- [54] M. R. Douglas, “Topics in D-geometry,” *Class. Quant. Grav.* **17** (2000) 1057 [arXiv:hep-th/9910170].
- [55] F. Denef, “Supergravity flows and D-brane stability,” *JHEP* **0008** (2000) 050 [arXiv:hep-th/0005049].
- [56] F. Denef, “On the correspondence between D-branes and stationary supergravity solutions of type II Calabi-Yau compactifications,” arXiv:hep-th/0010222.
- [57] F. Denef, “(Dis)assembling special Lagrangians,” arXiv:hep-th/0107152.
- [58] A. Strominger, “Massless black holes and conifolds in string theory,” *Nucl. Phys. B* **451** (1995) 96 [arXiv:hep-th/9504090].
- [59] B. R. Greene, D. R. Morrison and A. Strominger, “Black hole condensation and the unification of string vacua,” *Nucl. Phys. B* **451** (1995) 109 [arXiv:hep-th/9504145].
- [60] C. V. Johnson, A. W. Peet and J. Polchinski, “Gauge theory and the excision of repulson singularities,” *Phys. Rev. D* **61** (2000) 086001 [arXiv:hep-th/9911161].
- [61] M. R. Douglas, B. Fiol and C. Romelsberger, “Stability and BPS branes,” *JHEP* **0509** (2005) 006 [arXiv:hep-th/0002037].
- [62] M. R. Douglas, B. Fiol and C. Romelsberger, “The spectrum of BPS branes on a noncompact Calabi-Yau,” *JHEP* **0509** (2005) 057 [arXiv:hep-th/0003263].
- [63] M. R. Douglas, “D-branes, categories and $N = 1$ supersymmetry,” *J. Math. Phys.* **42** (2001) 2818 [arXiv:hep-th/0011017].
- [64] B. Bates and F. Denef, “Exact solutions for supersymmetric stationary black hole composites,” arXiv:hep-th/0304094.
- [65] C. Vafa, “Black holes and Calabi-Yau threefolds,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 207 (1998) [arXiv:hep-th/9711067].
- [66] S. W. Hawking, “The Path Integral Approach To Quantum Gravity,”
- [67] G. Gibbons, “Euclidean quantum gravity: The view from 2002,” *Prepared for Workshop on Conference on the Future of Theoretical Physics and Cosmology in Honor of Steven Hawking’s 60th Birthday, Cambridge, England, 7-10 Jan 2002*
- [68] K. Hori *et al.*, “Mirror symmetry,” *Providence, USA: AMS (2003) 929 p*
- [69] M. Vonk, “A mini-course on topological strings,” arXiv:hep-th/0504147.

- [70] M. Mariño, “Chern-Simons theory, matrix models, and topological strings,” *Oxford, UK: Clarendon (2005) 197 p*
- [71] R. M. Wald, “Black hole entropy in the Noether charge,” *Phys. Rev. D* **48** (1993) 3427 [arXiv:gr-qc/9307038].
- [72] V. Iyer and R. M. Wald, “Some properties of Noether charge and a proposal for dynamical black hole *Phys. Rev. D* **50** (1994) 846 [arXiv:gr-qc/9403028].
- [73] J. Lee and R. M. Wald, “Local Symmetries And Constraints,” *J. Math. Phys.* **31**, 725 (1990).
- [74] T. Jacobson, G. Kang and R. C. Myers, “On black hole entropy,” *Phys. Rev. D* **49**, 6587 (1994) [arXiv:gr-qc/9312023].
- [75] I. Antoniadis, E. Gava, K. S. Narain and T. R. Taylor, “Topological amplitudes in string theory,” *Nucl. Phys. B* **413** (1994) 162 [arXiv:hep-th/9307158].
- [76] T. Mohaupt, “Black hole entropy, special geometry and strings,” *Fortsch. Phys.* **49**, 3 (2001) [arXiv:hep-th/0007195].
- [77] G. Lopes Cardoso, B. de Wit, J. Kappeli and T. Mohaupt, “Black hole partition functions and duality,” *JHEP* **0603** (2006) 074 [arXiv:hep-th/0601108].
- [78] C. Vafa, “Two dimensional Yang-Mills, black holes and topological strings,” arXiv:hep-th/0406058.
- [79] R. Dijkgraaf, R. Gopakumar, H. Ooguri and C. Vafa, “Baby universes in string theory,” *Phys. Rev. D* **73** (2006) 066002 [arXiv:hep-th/0504221].
- [80] F. Denef and G. W. Moore, “Split states, entropy enigmas, holes and halos,” arXiv:hep-th/0702146.
- [81] J. B. Hartle and S. W. Hawking, “Wave Function Of The Universe,” *Phys. Rev. D* **28** (1983) 2960.
- [82] E. P. Wigner, “On the quantum correction for thermodynamic equilibrium,” *Phys. Rev.* **40** (1932) 749.
- [83] H. Weyl, “The Theory of Groups and Quantum Mechanics,” Dover, New York (1931).
- [84] G. Lopes Cardoso, B. de Wit and T. Mohaupt, “Corrections to macroscopic supersymmetric black-hole entropy,” *Phys. Lett. B* **451** (1999) 309 [arXiv:hep-th/9812082].
- [85] G. Lopes Cardoso, B. de Wit and T. Mohaupt, “Deviations from the area law for supersymmetric black holes,” *Fortsch. Phys.* **48** (2000) 49 [arXiv:hep-th/9904005].

- [86] G. Lopes Cardoso, B. de Wit and T. Mohaupt, “Macroscopic entropy formulae and non-holomorphic corrections for supersymmetric black holes,” Nucl. Phys. B **567** (2000) 87 [arXiv:hep-th/9906094].
- [87] G. Lopes Cardoso, B. de Wit and T. Mohaupt, “Area law corrections from state counting and supergravity,” Class. Quant. Grav. **17** (2000) 1007 [arXiv:hep-th/9910179].
- [88] D. Gaiotto, A. Strominger and X. Yin, “From AdS(3)/CFT(2) to black holes / topological strings,” arXiv:hep-th/0602046.
- [89] C. Beasley, D. Gaiotto, M. Guica, L. Huang, A. Strominger and X. Yin, “Why $Z(\text{BH}) = -Z(\text{top})^{**2}$,” arXiv:hep-th/0608021.
- [90] R. Dijkgraaf, E. P. Verlinde and M. Vonk, “On the partition sum of the NS five-brane,” arXiv:hep-th/0205281.
- [91] A. A. Gerasimov and S. L. Shatashvili, “Towards integrability of topological strings. I: Three-forms on Calabi-Yau manifolds,” JHEP **0411**, 074 (2004) [arXiv:hep-th/0409238].
- [92] E. P. Verlinde, “Attractors and the holomorphic anomaly,” arXiv:hep-th/0412139.
- [93] F. Loran, “Kaehler quantization of $H^3(\text{CY}(3), \mathbb{R})$ and the holomorphic anomaly,” JHEP **0512**, 004 (2005) [arXiv:hep-th/0510163].
- [94] B. de Wit, G. Lopes Cardoso, D. Lust, T. Mohaupt and S. J. Rey, “Higher-order gravitational couplings and modular forms in $N = 2$, $D = 4$ heterotic string compactifications,” Nucl. Phys. B **481** (1996) 353 [arXiv:hep-th/9607184].
- [95] G. Lopes Cardoso, B. de Wit, J. Kappeli and T. Mohaupt, “Asymptotic degeneracy of dyonic $N = 4$ string states and black hole entropy,” JHEP **0412** (2004) 075 [arXiv:hep-th/0412287].
- [96] M. Aganagic, V. Bouchard and A. Klemm, “Topological strings and (almost) modular forms,” arXiv:hep-th/0607100.
- [97] A. Sen, “How does a fundamental string stretch its horizon?,” JHEP **0505** (2005) 059 [arXiv:hep-th/0411255].
- [98] A. Sen, “Black holes, elementary strings and holomorphic anomaly,” JHEP **0507** (2005) 063 [arXiv:hep-th/0502126].
- [99] A. Dabholkar, “Exact counting of black hole microstates,” Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 241301 [arXiv:hep-th/0409148].

- [100] M. Aganagic, H. Ooguri, N. Saulina and C. Vafa, “Black holes, q-deformed 2d Yang-Mills, and non-perturbative topological strings,” Nucl. Phys. B **715** (2005) 304 [arXiv:hep-th/0411280].
- [101] A. Dabholkar, F. Denef, G. W. Moore and B. Pioline, “Exact and asymptotic degeneracies of small black holes,” JHEP **0508** (2005) 021 [arXiv:hep-th/0502157].
- [102] M. Aganagic, A. Neitzke and C. Vafa, “BPS microstates and the open topological string wave function,” arXiv:hep-th/0504054.
- [103] A. Sen, “Black hole entropy function and the attractor mechanism in higher derivative gravity,” JHEP **0509** (2005) 038 [arXiv:hep-th/0506177].
- [104] A. Dabholkar, F. Denef, G. W. Moore and B. Pioline, “Precision counting of small black holes,” JHEP **0510** (2005) 096 [arXiv:hep-th/0507014].
- [105] D. Shih and X. Yin, “Exact black hole degeneracies and the topological string,” JHEP **0604** (2006) 034 [arXiv:hep-th/0508174].
- [106] M. Aganagic, D. Jafferis and N. Saulina, “Branes, black holes and topological strings on toric Calabi-Yau manifolds,” arXiv:hep-th/0512245.
- [107] M. Gunaydin, A. Neitzke, B. Pioline and A. Waldron, “BPS black holes, quantum attractor flows and automorphic forms,” Phys. Rev. D **73** (2006) 084019 [arXiv:hep-th/0512296].
- [108] D. Jafferis, “Crystals and intersecting branes,” arXiv:hep-th/0607032.
- [109] D. Gaiotto, A. Strominger and X. Yin, “The M5-brane elliptic genus: Modularity and BPS states,” arXiv:hep-th/0607010.
- [110] J. de Boer, M. C. N. Cheng, R. Dijkgraaf, J. Manschot and E. Verlinde, “A farey tail for attractor black holes,” arXiv:hep-th/0608059.
- [111] A. Schwarz and X. Tang, “Quantization and holomorphic anomaly,” arXiv:hep-th/0611281.
- [112] M. Gunaydin, A. Neitzke and B. Pioline, “Topological wave functions and heat equations,” arXiv:hep-th/0607200.
- [113] R. Dijkgraaf, S. Gukov, A. Neitzke and C. Vafa, “Topological M-theory as unification of form theories of gravity,” Adv. Theor. Math. Phys. **9**, 593 (2005) [arXiv:hep-th/0411073].
- [114] N. Nekrasov, “A la recherche de la m-theorie perdue. Z theory: Casing m/f theory,” arXiv:hep-th/0412021.

- [115] N. J. Hitchin, “The Geometry Of Three Forms In Six-Dimensions,” *J. Diff. Geom.* **55** (2000) 547.
- [116] V. Pestun and E. Witten, “The Hitchin functionals and the topological B-model at one loop,” *Lett. Math. Phys.* **74**, 21 (2005) [arXiv:hep-th/0503083].
- [117] N. L. Balazs and B. K. Jennings, “Wigner’s Function And Other Distribution Functions In Mock Phase Spaces,” *Phys. Rept.* **104** (1984) 347.
M. Hillery, R. F. O’Connell, M. O. Scully and E. P. Wigner, “Distribution functions in physics: Fundamentals,” *Phys. Rept.* **106** (1984) 121.
H.-W. Lee, “Theory and application of the quantum phase-space distribution functions,” *Phys. Rep.* **259** (1995) 147-211.
U.M. Engel, “On Quantum Chaos, Stochastic Webs and Localization in a Quantum Mechanical Kick System”, PhD Thesis, Westfälischen Wilhelms-Universität Münster (2003).
- [118] C. Zachos, D. Fairlie and T. Curtright, “Quantum Mechanics in Phase Space. An Overview with Selected Papers,” World Scientific, Singapore (2005).
- [119] E. Witten, “Chern-Simons Gauge Theory As A String Theory,” *Prog. Math.* **133** (1995) 637 [arXiv:hep-th/9207094].
- [120] H. Ooguri, Y. Oz and Z. Yin, “D-branes on Calabi-Yau spaces and their mirrors,” *Nucl. Phys. B* **477** (1996) 407 [arXiv:hep-th/9606112].
- [121] M. Aganagic, A. Klemm, M. Mariño and C. Vafa, “The topological vertex,” *Commun. Math. Phys.* **254** (2005) 425 [arXiv:hep-th/0305132].
- [122] M. Aganagic, R. Dijkgraaf, A. Klemm, M. Mariño and C. Vafa, “Topological strings and integrable hierarchies,” *Commun. Math. Phys.* **261** (2006) 451 [arXiv:hep-th/0312085].
- [123] M. Mariño, “Les Houches lectures on matrix models and topological strings,” arXiv:hep-th/0410165.
- [124] C. I. Lazaroiu, “Holomorphic matrix models,” *JHEP* **0305** (2003) 044 [arXiv:hep-th/0303008].
- [125] A. Bilal and S. Metzger, “Special geometry of local Calabi-Yau manifolds and superpotentials from holomorphic matrix models,” *JHEP* **0508** (2005) 097 [arXiv:hep-th/0503173].
- [126] A. Klemm, M. Mariño and S. Theisen, “Gravitational corrections in supersymmetric gauge theory and matrix models,” *JHEP* **0303** (2003) 051 [arXiv:hep-th/0211216].

- [127] R. Dijkgraaf, A. Sinkovics and M. Temurhan, “Matrix models and gravitational corrections,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **7** (2004) 1155 [arXiv:hep-th/0211241].
- [128] M. x. Huang and A. Klemm, “Holomorphic anomaly in gauge theories and matrix models,” arXiv:hep-th/0605195.
- [129] B. Eynard, M. Mariño and N. Orantin, “Holomorphic anomaly and matrix models,” arXiv:hep-th/0702110.
- [130] A. Schwarz and X. Tang, “Quantization and holomorphic anomaly,” *JHEP* **0703** (2007) 062 [arXiv:hep-th/0611281].
- [131] B. Eynard and N. Orantin, “Invariants of algebraic curves and topological expansion,” arXiv:math-ph/0702045.
- [132] M. Mariño, “Open string amplitudes and large order behavior in topological string theory,” arXiv:hep-th/0612127.
- [133] M. Aganagic, M. Mariño and C. Vafa, “All loop topological string amplitudes from Chern-Simons theory,” *Commun. Math. Phys.* **247** (2004) 467 [arXiv:hep-th/0206164].
- [134] P. H. Ginsparg and G. W. Moore, “Lectures on 2-D gravity and 2-D string theory,” arXiv:hep-th/9304011. P. Di Francesco, P. H. Ginsparg and J. Zinn-Justin, “2-D Gravity and random matrices,” *Phys. Rept.* **254**, 1 (1995) [arXiv:hep-th/9306153].
- [135] H. Dorn and H. J. Otto, “Some conclusions for noncritical string theory drawn from two and three point functions in the Liouville sector,” arXiv:hep-th/9501019. J. Teschner, “On the Liouville three point function,” *Phys. Lett. B* **363** (1995) 65 [arXiv:hep-th/9507109]. A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, “Structure constants and conformal bootstrap in Liouville field theory,” *Nucl. Phys. B* **477** (1996) 577 [arXiv:hep-th/9506136]. V. Fateev, A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, “Boundary Liouville field theory. I: Boundary state and boundary two-point function,” arXiv:hep-th/0001012. J. Teschner, “Liouville theory revisited,” *Class. Quant. Grav.* **18** (2001) R153 [arXiv:hep-th/0104158]. A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, “Liouville field theory on a pseudosphere,” arXiv:hep-th/0101152. B. Ponsot and J. Teschner, “Boundary Liouville field theory: Boundary three point function,” *Nucl. Phys. B* **622** (2002) 309 [arXiv:hep-th/0110244].
- [136] N. Seiberg and D. Shih, “Branes, rings and matrix models in minimal (super)string theory,” *JHEP* **0402** (2004) 021 [arXiv:hep-th/0312170].

-
- [137] D. Gaiotto and L. Rastelli, “A paradigm of open/closed duality: Liouville D-branes and the Kontsevich model,” arXiv:hep-th/0312196. D. Kutasov, K. Okuyama, J. w. Park, N. Seiberg and D. Shih, “Annulus amplitudes and ZZ branes in minimal string theory,” JHEP **0408** (2004) 026 [arXiv:hep-th/0406030]. J. Ambjorn, S. Arianos, J. A. Gesser and S. Kawamoto, “The geometry of ZZ-branes,” Phys. Lett. B **599** (2004) 306 [arXiv:hep-th/0406108]. A. Sato and A. Tsuchiya, “ZZ brane amplitudes from matrix models,” JHEP **0502**, 032 (2005) [arXiv:hep-th/0412201].
- [138] J. Maldacena, G. W. Moore, N. Seiberg and D. Shih, “Exact vs. semiclassical target space of the minimal string,” JHEP **0410** (2004) 020 [arXiv:hep-th/0408039].
- [139] M. V. Berry, “Semi-classical mechanics in phase space: A study of Wigner’s function,” Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A **287** (1977) 237.